

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 9

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

PRZYKŁAD

Niech (Ω, μ) i (Λ, ν) będą σ -skończonymi przestrzeniami z miarą i rozważmy $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$ oraz $\psi \in L_2(\Lambda, \nu)$. Wówczas na mocy twierdzenia Fubiniego funkcja

$$\Omega \times \Lambda \ni (x, y) \longmapsto \varphi(x)\psi(y) \in \mathbb{C}$$

jest całkowalna z kwadratem względem miary produktowej $\mu \otimes \nu$ na $\Omega \times \Lambda$.

Funkcję $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ nazywamy **iloczynem tensorowym** funkcji φ i ψ , a oznaczamy symbolem $\varphi \otimes \psi$. Odwzorowanie $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ jest dwuliniowe $L_2(\Omega, \mu) \times L_2(\Lambda, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$, a więc wyznacza operator liniowy $L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$. W następnym twierdzeniu pokażemy, że przy jednym dodatkowym założeniu operator ten jest unitarny.

LEMAT

Niech $\{\xi_i\}_{i \in I}$ i $\{\eta_i\}_{i \in I}$ będą bazami ortonormalnymi przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden operator unitarny $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ taki, że $U\xi_i = \eta_i$ dla wszystkich i .

DOWÓD

Najpierw definiujemy U_0 na $\text{span}\{\xi_i \mid i \in I\}$ kładąc $U_0\xi_i = \eta_i$. Operator ten jest izometryczny, a więc rozszerza się jednoznacznie do izometrii $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, która ma gęsty obraz (bo zawiera on $\text{span}\{\eta_i \mid i \in I\}$). Ale obraz izometrii jest zawsze domknięty, więc U jest operatorem unitarnym. □

TWIERDZENIE

Niech (Ω, μ) i (Λ, ν) będą σ -skończonymi przestrzeniami z miarą takimi, że przestrzenie Hilberta $L_2(\Omega, \mu)$ i $L_2(\Lambda, \nu)$ są ośrodkowe. Wówczas operator

$$L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu) \longrightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$$

przeprowadzający każdy tensor prosty $\xi \otimes \eta \in L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu)$ na funkcję

$$\Omega \times \Lambda \ni (x, y) \longmapsto \xi(x)\eta(y) \in \mathbb{C}$$

rozszerza się do operatora unitarnego $L_2(\Omega, \mu) \otimes L_2(\Lambda, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$.

DOWÓD

Niech $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ będą bazami ortonormalnymi $L_2(\Omega, \mu)$ i $L_2(\Lambda, \nu)$. Z twierdzenia Fubiniego natychmiast wnioskujemy, że funkcje

$$\Omega \times \Lambda \ni (x, y) \longmapsto \phi_i(x)\psi_j(y) \in \mathbb{C}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

tworzą układ ortonormalny w $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$. Wykażemy, że element przestrzeni $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$, który jest ortogonalny do wszystkich tych funkcji musi być zerem, a więc funkcje te tworzą bazę ortonormalną przestrzeni $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$.

Weźmy więc $\theta \in L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$ taką, że

$$\int_{\Omega \times \Lambda} \overline{\theta(x, y)} \phi_i(x) \psi_j(y) \, d(\mu \otimes \nu)(x, y) = 0$$

dla wszystkich i i j . Zauważmy, że skoro $|\theta|^2$ jest całkowalna na $\Omega \times \Lambda$, na mocy twierdzenia Fubiniego, funkcja $\theta(\cdot, y): \Omega \ni x \longmapsto \theta(x, y)$ należy do $L_2(\Omega, \mu)$ dla prawie wszystkich $y \in \Lambda$.

DOWÓD

Co więcej, iloczyn skalarny $\theta(\cdot, y)$ z dowolną funkcją $\xi \in L_2(\Omega, \mu)$ jest (prawie wszędzie zdefiniowaną) funkcją całkowalną z kwadratem, gdyż

$$\int_{\Lambda} |\langle \theta(\cdot, y) | \xi \rangle|^2 d\nu(y) \leq \int_{\Lambda} \|\theta(\cdot, y)\|_2^2 \|\xi\|_2^2 d\nu(y) = \int_{\Omega \times \Lambda} |\theta|^2 d(\mu \otimes \nu) \|\xi\|_2^2 = \|\theta\|_2^2 \|\xi\|_2^2.$$

Dalej rachunek

$$0 = \int_{\Lambda} \left(\int_{\Omega} \overline{\theta(x, y)} \phi_i(x) d\mu(x) \right) \psi_j(y) d\nu(y) = \int_{\Lambda} \langle \theta(\cdot, y) | \phi_i \rangle \psi_j(y) d\nu(y)$$

pokazuje, że dla każdego i element $y \mapsto \langle \theta(\cdot, y) | \phi_i \rangle$ przestrzeni $L_2(\Lambda, \nu)$ jest ortogonalny do ψ_j dla wszystkich j . Innymi słowy funkcja $y \mapsto \langle \theta(\cdot, y) | \phi_i \rangle$ jest równa zero na $\Lambda \setminus \Delta_i$ dla pewnego zbioru $\Delta_i \subset \Lambda$ miary zero.

DOWÓD

W konsekwencji, dla $y \in \Lambda \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \right)$ funkcja $\theta(\cdot, y)$ jest równa zero prawie wszędzie na Ω , a stąd $\theta = 0$ w $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$.

Skoro funkcje $(x, y) \mapsto \phi_i(x)\psi_j(y)$ tworzą bazę ortonormalną $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$, lemat mówi, że istnieje jedyny operator unitarny $U: L_2(\Omega, \mu) \otimes L_2(\Lambda, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$ odwzorowujący każdy element $\phi_{i_0} \otimes \psi_{j_0}$ bazy $\{\phi_i \otimes \psi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ na funkcję

$$(x, y) \mapsto \phi_{i_0}(x)\psi_{j_0}(y).$$

Weźmy teraz tensor prosty $\xi \otimes \eta \in L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu)$. Mamy

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \quad \text{oraz} \quad \eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n,$$

$$\text{gdzie } \xi_n = \sum_{i=1}^n \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i \text{ i } \eta_n = \sum_{j=1}^n \langle \psi_j | \eta \rangle \psi_j.$$

DOWÓD

Istnieją podciągi $(\xi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i $(\eta_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ takie, że $\xi_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \xi$ oraz $\eta_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \eta$ punktowo prawie wszędzie. Co więcej $\xi_{n_k} \otimes \eta_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \xi \otimes \eta$, bo

$$\begin{aligned} \|\xi_{n_k} \otimes \eta_{n_k} - \xi \otimes \eta\|^2 &= \langle \xi_{n_k} \otimes \eta_{n_k} - \xi \otimes \eta | \xi_{n_k} \otimes \eta_{n_k} - \xi \otimes \eta \rangle \\ &= \|\xi_{n_k} \otimes \eta_{n_k}\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \xi_{n_k} \otimes \eta_{n_k} | \xi \otimes \eta \rangle + \|\xi \otimes \eta\|^2 \\ &= \|\xi_{n_k}\|^2 \|\eta_{n_k}\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \xi_{n_k} | \xi \rangle \langle \eta_{n_k} | \eta \rangle + \|\xi\|^2 \|\eta\|^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

DOWÓD

Tak więc

$$U(\xi \otimes \eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} U\left(\sum_{i,j=1}^{n_k} \langle \phi_i | \xi \rangle \langle \psi_j | \eta \rangle (\phi_i \otimes \psi_j)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{n_k} \langle \phi_i | \xi \rangle \langle \psi_j | \eta \rangle U(\phi_i \otimes \psi_j),$$

a ponieważ $U(\phi_i \otimes \psi_j)(x, y) = \phi_i(x)\psi_j(y)$ dla prawie wszystkich $(x, y) \in \Omega \times \Lambda$, otrzymujemy

$$(U(\xi \otimes \eta))(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^{n_k} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i(x)\right) \left(\sum_{i=1}^{n_k} \langle \psi_i | \eta \rangle \psi_i(y)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{n_k}(x) \eta_{n_k}(y) = \xi(x) \eta(y)$$

dla prawie wszystkich $(x, y) \in \Omega \times \Lambda$. □

PRZYKŁAD

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, a I zbiorem. Rozważmy iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H}$ i niech $\{\delta_i\}_{i \in I}$ będzie bazą standardową $\ell_2(I)$. Dalej niech $\{\psi_j\}_{j \in J}$ będzie bazą ortonormalną $\mathcal{H}$. Mamy wówczas naturalną bijekcję pomiędzy bazami ortonormalnymi $\{\delta_i \otimes \psi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ przestrzeni $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H}$ i bazą ortonormalną $\bigsqcup_I \{\psi_j\}_{j \in J} = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \{\psi_j\}_{j \in J}$ przestrzeni $\bigoplus_I \mathcal{H}$. Tak więc istnieje operator unitarny $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_I \mathcal{H}$ przeprowadzający jedną bazę na drugą. W szczególności $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H} \cong \bigoplus_I \mathcal{H}$.

UWAGA

Nietrudno się przekonać, że jeśli $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ są przestrzeniami Hilberta, to jedyny operator $U: (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H} \otimes (\mathcal{K} \otimes \mathcal{L})$ przeprowadzający dowolny tensor postaci $(\xi \otimes \eta) \otimes \theta$ na $\xi \otimes (\eta \otimes \theta)$ jest unitarny. Korzystając z tego możemy utożsamić te przestrzenie i oznaczać obie symbolem $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$.

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta.
- Rozważmy odwzorowanie $\chi \in B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ takie, że

$$\chi(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

- χ jest operatorem unitarnym i $\chi^2 = \mathbb{1}$, a więc operator ten ma tylko dwie wartości własne $+1$ i -1 .
- Niech

$$\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H} = \{\Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \mid \chi \Xi = \Xi\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H} = \{\Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \mid \chi \Xi = -\Xi\}$$

- $\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$ i $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H}$ są domkniętymi podprzestrzeniami $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Łatwo też zauważyć, że są ortogonalne (jeśli $\Xi \in \mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$ i $\Pi \in \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H}$, to $\langle \Xi | \Pi \rangle = \langle \chi \Xi | \chi \Pi \rangle = \langle \Xi | -\Pi \rangle = -\langle \Xi | \Pi \rangle$).

- Rzut ortogonalny na $\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$ nazywamy **symetryzatorem** i oznaczamy symbolem Sym , a rzut na $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H}$ nazywamy **antysymetryzatorem** i oznaczamy Alt
- Mamy

$$\begin{cases} \text{Sym } \Xi = \frac{1}{2}(\Xi + \chi\Xi) \\ \text{Alt } \Xi = \frac{1}{2}(\Xi - \chi\Xi) \end{cases}, \quad \Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}.$$

- Operator χ definiuje działanie grupy S_2 na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.
- Analogicznie definiujemy działanie grupy S_n na $\mathcal{H}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ czynników}}$:

$$\pi \cdot (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) = \varphi_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi^{-1}(n)}, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}, \pi \in S_n$$

- Rozszerzamy pojęcie symetryzatora i antysymetryzatora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sym } \Xi = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \pi \cdot \Xi \\ \text{Alt } \Xi = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \pi \cdot \Xi \end{array} \right., \quad \Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^{\otimes n}.$$

i definiujemy $\mathcal{H}^{\otimes_s n}$ oraz $\mathcal{H}^{\otimes_a n}$ jako obrazy rzutów Sym i Alt.

- Jest jasne, że działanie S_n na $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{s}} n}$ jest trywialne, a na $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{a}} n}$ każda $\pi \in S_n$ działa przez mnożenie przez skalar $\text{sgn}(\pi)$.
- Tak jak w przypadku $n = 2$, podprzestrzenie $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{s}} n}$ i $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{a}} n}$ są ortogonalne oraz mamy $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{s}} n} \oplus \mathcal{H}^{\otimes_{\text{a}} n} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

PRZYKŁAD

Mamy naturalne utożsamienie $\underbrace{L_2(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes L_2(\mathbb{R})}_{d \text{ razy}} \cong L_2(\mathbb{R}^d)$ przeprowadzające każdy tensor prosty $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_d$ na funkcję

$$\mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \mapsto \psi_1(\mathbf{x}_1) \cdots \psi_d(\mathbf{x}_d) \in \mathbb{C}.$$

Nietrudno się przekonać, że przy tym utożsamieniu podprzestrzeń $L_2(\mathbb{R})^{\otimes_{\text{s}} n}$ odpowiada przestrzeni tych $\Psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, dla których

$$\Psi(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(d)}) = \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

dla wszystkich $\pi \in S_d$ i prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Z kolei $L_2(\mathbb{R})^{\otimes_{\text{a}} n}$ staje się przestrzenią tych $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, które spełniają

$$\Phi(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(d)}) = \text{sgn}(\pi) \Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

dla wszystkich $\pi \in S_d$ i prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta.
- **Pełną przestrzenią Focka** nazywamy przestrzeń

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

gdzie $\mathcal{H}^{\otimes 0}$ utożsamiamy z przestrzenią jednowymiarową $\mathbb{C}$.

- Wektor $1 \in \mathbb{C} = \mathcal{H}^{\otimes 0} \subset \Gamma(\mathcal{H})$ tradycyjnie oznacza się symbolem Ω .
- Na każdym składniku prostym przestrzeni $\Gamma(\mathcal{H})$ mamy działanie odpowiedniej grupy permutacji. W szczególności możemy na nich dokonać symetryzacji lub anty-symetryzacji.

- **Bozonową przestrzenią Focka** nazywamy przestrzeń

$$\Gamma_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes_s n}$$

(przy czym $\mathcal{H}^{\otimes_s 0} = \mathbb{C}$, a $\mathcal{H}^{\otimes_s 1} = \mathcal{H}$).

- **Fermionową przestrzenią Focka** nazywamy przestrzeń

$$\Gamma_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes_a n}$$

(podobnie $\mathcal{H}^{\otimes_a 0} = \mathbb{C}$, a $\mathcal{H}^{\otimes_a 1} = \mathcal{H}$).