

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 10

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

- Niech $T \in B(\mathcal{K}_1, \mathcal{H}_1)$ i $S \in B(\mathcal{K}_2, \mathcal{H}_2)$. Odwzorowanie

$$\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \ni (\xi, \eta) \longmapsto T\xi \otimes S\eta \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

jest dwuliniowe, a więc istnieje jedyne odwzorowanie liniowe

$T \otimes_{\text{alg}} S: \mathcal{K}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ takie, że

$$(T \otimes_{\text{alg}} S) \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i = \sum_{i=1}^n T\xi_i \otimes S\eta_i$$

dla wszystkich $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{K}_1$ i $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{K}_2$.

STWIERDZENIE

Niech $T \in B(\mathcal{K}_1, \mathcal{H}_1)$ i $S \in B(\mathcal{K}_2, \mathcal{H}_2)$. Wówczas operator $T \otimes_{\text{alg}} S$ rozszerza się do $T \otimes S: \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ o normie $\|T\| \|S\|$.

DOWÓD

Na początek rozważmy przypadek $\mathcal{H}_2 = \mathcal{K}_2$ i $S = \mathbb{1}$. Jeśli $\Psi \in \mathcal{K}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}_2$ i zapiszemy Ψ w postaci

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \psi_i,$$

gdzie $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ są ortonormalne, to

$$\|(T \otimes_{\text{alg}} S)\Psi\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n T\xi_i \otimes \psi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|T\xi_i\|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 = \|T\|^2 \|\Psi\|^2.$$

Wynika stąd, że $T \otimes_{\text{alg}} S = T \otimes_{\text{alg}} \mathbb{1}$ jest ograniczony, a jego norma nie przekracza $\|T\|$. W konsekwencji operator ten rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego operatora $\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ o normie nie większej niż $\|T\|$. Oznaczmy ten operator symbolem $T \otimes \mathbb{1}$.

DOWÓD

Podobnie w przypadku $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_1$ i $T = \mathbb{1}$ widzimy, że $\mathbb{1} \otimes_{\text{alg}} S$ rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego operatora $\mathbb{1} \otimes S: \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ spełniającego $\|\mathbb{1} \otimes S\| \leq \|S\|$.

W przypadku ogólnym zauważamy, że operator $(\mathbb{1} \otimes S)(T \otimes \mathbb{1})$ obcięty do $\mathcal{K}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}_2$ jest równy $T \otimes_{\text{alg}} S$, a więc operator ten rozszerza się do ograniczonego operatora $(\mathbb{1} \otimes S)(T \otimes \mathbb{1}): \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_2$, który oznaczamy symbolem $T \otimes S$. Co więcej

$$\|T \otimes S\| = \|(\mathbb{1} \otimes S)(T \otimes \mathbb{1})\| \leq \|(\mathbb{1} \otimes S)\| \|T \otimes \mathbb{1}\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Teraz weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ i niech $\xi \in \mathcal{K}_1$ oraz $\eta \in \mathcal{K}_2$ będą takie, że $\|T\xi\| > \|T\| - \varepsilon$ i $\|S\eta\| > \|S\| - \varepsilon$. Wówczas

$$\|(T \otimes S)(\xi \otimes \eta)\| = \|T\xi \otimes S\eta\| = \|T\xi\| \|S\eta\| > (\|T\| - \varepsilon)(\|S\| - \varepsilon) = \|T\| \|S\| - \varepsilon(\|T\| + \|S\|) + \varepsilon^2,$$

co pokazuje, że $\|T \otimes S\| \geq \|T\| \|S\|$. □

DEFINICJA

Niech $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$ i $S \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2)$. Operator $T \otimes S$ skonstruowany w powyższym stwierdzeniu nazywamy **iloczynem tensorowym** operatorów T i S .

CIEKAWOSTKA

Łatwo się przekonać, że jeśli $\dim \mathcal{H} < \infty$, to każdy operator na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ jest kombinacją liniową iloczynów tensorowych elementów $B(\mathcal{H})$.

Z kolei jeśli $\dim \mathcal{H} = \infty$, to nie każdy operator na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ jest granicą kombinacji liniowych operatorów postaci $T \otimes S$. Przykładowo operator χ leży w odległości 1 od domkniętej powłoki wypukłej operatorów postaci $T \otimes S$.

- Zależnie od kontekstu rozważać będziemy szeregi Fouriera

- funkcji okresowych na $\mathbb{R}$ o okresie 2π ,
- funkcji na $[-\pi, \pi]$,
- funkcji na $\mathbb{T}$,

gdzie jak zwykle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- Symbolem m będziemy oznaczać znormalizowaną miarę Lebesgue'a na $\mathbb{T}$:

$$\int_{\mathbb{T}} f \, dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \, dt.$$

- Przypomnijmy też notację:

$$\phi_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbb{T}, \, n \in \mathbb{Z}.$$

oraz

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi], \, n \in \mathbb{Z}.$$

- Mamy $\phi_n = W\phi_n$ ($n \in \mathbb{N}$), gdzie W jest operatorem unitarnym $L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2([- \pi, \pi])$ danym wzorem

$$(W\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(e^{it}), \quad \psi \in L_2(\mathbb{T}), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

- Współrzędne wektora $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$ w bazie $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ nazywamy **współczynnikami Fouriera** funkcji φ i oznaczamy je w następujący sposób:

$$\hat{\varphi}(n) = \langle \phi_n | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \varphi(z) \, dm(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Oznaczając symbolem $\hat{\varphi}$ kolekcję $(\hat{\varphi})_{n \in \mathbb{Z}}$ otrzymujemy odwzorowanie unitarne $L_2(\mathbb{T}) \ni \varphi \mapsto \hat{\varphi} \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

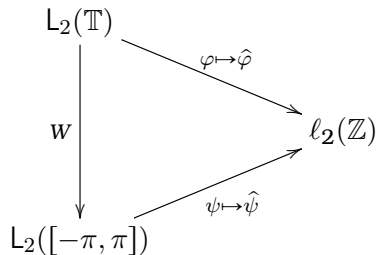
- Dla $\psi \in L_2([- \pi, \pi])$ mamy

$$\hat{\psi}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \psi(t) \, dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Współczynniki Fouriera można zdefiniować nie tylko dla elementów L_2 ale także dla funkcji z L_1 .
- Poniższa tabelka podaje wzory na współczynniki Fouriera w różnych sytuacjach:

Funkcja	Współczynnik Fouriera
$\varphi \in L_2(\mathbb{T})$	$\hat{\varphi}(n) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \varphi(z) \, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(e^{it}) \, dt$
$\psi \in L_2([-\pi, \pi])$	$\hat{\psi}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \psi(t) \, dt$
$f \in L_1(\mathbb{T})$	$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} f(z) \, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(e^{it}) \, dt$
$g \in L_1([-\pi, \pi])$	$\hat{g}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} g(t) \, dt$

- Jest jasne, że diagram



(którego wszystkie strzałki są operatorami unitarnymi) jest przemienny.

- Uwaga: na poziomie L_1 analogiczny diagram nie jest przemienny.

- Niech $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$.
- Wtedy szereg $\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) \phi_n$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_2$.
- Przypomnijmy, że **jądro Dirichleta** jest to funkcja

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}x)} & x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{2N+1}{2\pi} & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

STWIERDZENIE

Niech $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$ i dla $N \in \mathbb{N}$ oraz $t \in [-\pi, \pi]$ zdefiniujmy $s_N(\psi, t)$ wzorem

$$s_N(\psi, t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t - \theta) \psi(\theta) d\theta, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Wówczas przy $N \rightarrow \infty$ funkcje $t \mapsto s_N(\psi, t)$ zbiegają do ψ w $L_2([-\pi, \pi])$.

DOWÓD

Funkcja $t \mapsto s_N(\psi, t)$ jest rzutem ψ na podprzestrzeń $\text{span}\{\phi_{-N}, \dots, \phi_N\}$. Dalej zauważmy, że skoro szereg $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) \phi_n$ jest zbieżny w L_2 , dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony podzbiór $I_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$ taki, że

$$\left\| \psi - \sum_{n \in I_\varepsilon} \hat{\psi}(n) \phi_n \right\|_2 < \varepsilon.$$

Niech $M_\varepsilon = \max\{|m| \mid m \in I_\varepsilon\}$. Wtedy dla każdego $N \geq M_\varepsilon$ mamy

$$\left\| \psi - \sum_{n=-N}^N \hat{\psi}(n) \phi_n \right\|_2^2 = \sum_{|n| > N} |\hat{\psi}(n)|^2 \leq \sum_{n \notin I_\varepsilon} |\hat{\psi}(n)|^2 = \left\| \psi - \sum_{n \in I_\varepsilon} \hat{\psi}(n) \phi_n \right\|_2^2 < \varepsilon^2.$$



UWAGA

Wiemy, że ciąg sum częściowych

$$\left(\sum_{n=-N}^N \hat{\psi}(n) \phi_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

ma podciąg zbieżny punktowo prawie wszędzie. Jednak wzór

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) e^{int}$$

jest kłopotliwy, gdyż nie ma gwarancji, że szereg jest zbieżny dla wybranego t .

- Przypomnijmy niezmienniczość miary m względem przesunięć na $\mathbb{T}$:

$$\int_{\mathbb{T}} f(z\zeta) \, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z) \, dm(z).$$

- Niech $f \in L_1(\mathbb{T})$. Wówczas ciąg współczynników Fouriera $\hat{f}$ jest ograniczony, bo

$$|\hat{f}(n)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(z)| \, dm(z) = \|f\|_1,$$

- W szczególności $\hat{f} \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$ i $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, czyli odwzorowanie $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym operatorem liniowym $L_1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z})$.

TWIERDZENIE (LEMAT RIEMANNA-LEBESGUE'A)

Niech $f \in L_1(\mathbb{T})$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0$.

DOWÓD

Najpierw zauważmy, że jeśli f należy do $L_2(\mathbb{T})$, to ciąg $\hat{f}$ jest sumowalny z kwadratem, a więc oczywiście dąży do zera w $\pm\infty$. Ponadto przestrzeń $L_2(\mathbb{T})$ jest gęsta w $L_1(\mathbb{T})$, gdyż zawiera $C(\mathbb{T})$, a ta podprzestrzeń jest gęsta w $L_p(\mathbb{T})$ dla każdego $p \in [1, +\infty[$. Tak więc dla każdej $f \in L_1(\mathbb{T})$ mamy $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, gdzie $f_n \in L_2(\mathbb{T})$. Dalej $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_1$, a zatem $\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty = \|\widehat{f_n - f}\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. W końcu przypomnijmy, że podprzestrzeń $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ złożona z ciągów zbieżnych do zera w $\pm\infty$ jest domknięta i w konsekwencji $\hat{f}$ do niej należy. $\square$

- Podprzestrzeń $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ złożona z ciągów zbieżnych do zera w $\pm\infty$ oznaczamy symbolem $c_0(\mathbb{Z})$.
- $c_0(\mathbb{Z})$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_\infty$.

STWIERDZENIE

Odwzorowanie $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym operatorem liniowym $L_1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$ o normie 1.

DOWÓD

Wiemy już, że operator $f \mapsto \hat{f}$ ma normę nie większą niż 1. Biorąc za f funkcję stałą **1** (która ma normę 1 w $L_1(\mathbb{T})$) widzimy, że ciąg $\hat{f}$ ma normę 1 w $c_0(\mathbb{Z})$, co pokazuje, że operator $f \mapsto \hat{f}$ ma normę równą dokładnie 1. □

WNIOSEK

Odwzorowanie $L_1([-\pi, \pi]) \ni g \mapsto \hat{g} \in c_0(\mathbb{Z})$ jest operatorem liniowym o normie $\sqrt{2\pi}$.

LEMAT

Niech $f \in L_1([-\pi, \pi])$ będzie taka, że dla dowolnego podprzedziału $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ mamy $\int_a^b f(t) dt = 0$. Wówczas $f \doteq 0$.

UWAGA

Analogiczne stwierdzenie z $L_2([-\pi, \pi])$ w miejscu $L_1([-\pi, \pi])$ jest oczywiste w świetle tego, że $L_2([-\pi, \pi])$ ma bazę której elementami są kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych przedziałów.

DOWÓD LEMATU

Jeśli funkcja f ma całkę zero po każdym $[a, b] \subset [\pi, \pi]$, to jest tak również dla $\bar{f}$. Oznacza to, że wystarczy udowodnić lemat dla funkcji f o wartościach rzeczywistych.

Położmy $E = \{t \in [-\pi, \pi] \mid f(t) \geq 0\}$. Jak każdy mierzalny podzbiór $[-\pi, \pi]$ zbiór E możemy zapisać w postaci $E = G \setminus N$, gdzie N jest miary zero, a G jest typu G_δ , tj. jest przecięciem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych:

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Z kolei każdy U_n jest co najwyżej przeliczalną sumą przedziałów otwartych:

$$U_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k^n, b_k^n[.$$

DOWÓD LEMATU

Wynika stąd, że dla każdego n

$$\int_{U_n} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[a_k^n, b_k^n]}(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k^n}^{b_k^n} f(t) dt = 0$$

i w konsekwencji

$$\int_E f(t) dt = \int_G f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_G(t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{U_n}(t) f(t) dt = 0$$

(bo $\mathbf{1}_{U_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_G f$ punktowo i dla wszystkich n mamy $|\mathbf{1}_{U_n} f| \leq |f|$).

Wykazaliśmy, że część dodatnia f jest równa zero prawie wszędzie. Analogicznie pokazujemy, że część ujemna f jest równa zero prawie wszędzie, a więc $f \doteq 0$. $\square$

TWIERDZENIE

Operator $L_1([-\pi, \pi]) \ni g \mapsto \hat{g} \in c_0(\mathbb{Z})$ jest iniektywny.

DOWÓD

Weźmy dowolną $g \in L_1([-\pi, \pi])$ i połóżmy

$$G(x) = \int_{-\pi}^x g(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Wtedy funkcja G jest ciągła, gdyż jeśli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do x w $[-\pi, \pi]$, to ciąg funkcji charakterystycznych $(\mathbf{1}_{[-\pi, x_n]})_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega punktowo do $\mathbf{1}_{[-\pi, x]}$, a więc $g\mathbf{1}_{[-\pi, x_n]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g\mathbf{1}_{[-\pi, x]}$ punktowo i możemy zastosować twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej.

TWIERDZENIE

Operator $L_1([-\pi, \pi]) \ni g \mapsto \hat{g} \in c_0(\mathbb{Z})$ jest iniektywny.

DOWÓD

Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\hat{G}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} G(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \left(\int_{-\pi}^x g(t) dt \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_T e^{-inx} g(t) dt dx,$$

gdzie $T = \{(x, t) \mid -\pi \leq t \leq x \leq \pi\}$.

Zamieniając kolejność całkowania otrzymujemy

$$\hat{G}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_t^{\pi} e^{-inx} g(t) dx dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_t^{\pi} e^{-inx} dx \right) g(t) dt.$$

TWIERDZENIE

Operator $L_1([-\pi, \pi]) \ni g \mapsto \hat{g} \in c_0(\mathbb{Z})$ jest iniektywny.

DOWÓD

Dla $n \neq 0$ ostatni wzór daje

$$\hat{G}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{n} ((-1)^n - e^{-int}) g(t) dt = \frac{i}{n} ((-1)^n \hat{g}(0) - \hat{g}(n)).$$

Przypuśćmy teraz, że $\hat{g} = 0$. Wówczas wszystkie współczynniki Fouriera G oprócz $\hat{G}(0)$ są równe zero. Funkcja G jest ciągła, a więc całkowna z kwadratem, co pokazuje, że G jest stała (a nawet równa zero, bo $G(-\pi) = 0$). Tak więc dla dowolnego $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ mamy $\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a) = 0$. Na mocy lematu, $g = 0$ w $L_1([-\pi, \pi])$. □

WNIOSEK

Niech $g \in L_1([-\pi, \pi])$ będzie taka, że $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(n)|^2 < +\infty$. Wówczas $g \in L_2([-\pi, \pi])$.

DOWÓD

Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} L_1([-\pi, \pi]) & \xrightarrow{g \mapsto \hat{g}} & c_0(\mathbb{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ L_2([-\pi, \pi]) & \xrightarrow{\psi \mapsto \hat{\psi}} & \ell_2(\mathbb{Z}) \end{array}$$

w którym pionowe strzałki są naturalnymi włożeniami. Skoro dolna pozioma strzałka jest izomorfizmem, teza wynika natychmiast z injektywności górnej poziomej strzałki.

□