

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 11

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

TWIERDZENIE

Niech $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Wtedy dla prawie każdego $z \in \mathbb{T}$ funkcja $\mathbb{T} \ni \zeta \mapsto f(z\zeta^{-1})g(\zeta)$ należy do $L_1(\mathbb{T})$, a funkcja

$$f * g: \mathbb{T} \ni z \longmapsto \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})g(\zeta) \, dm(\zeta) \in \mathbb{C}$$

także należy do $L_1(\mathbb{T})$ przy czym $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

DOWÓD

Zdefiniujmy $H(z, \zeta) = |f(z\zeta^{-1})g(\zeta)|$. Wtedy H jest nieujemną funkcją mierzalną na $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ i dzięki niezmienniczości miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$ względem przesunięć otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} H(z, \zeta) \, dm(z) \right) dm(\zeta) = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Tak więc na mocy twierdzenia Fubiniego

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} H(z, \zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Wynika stąd, że dla prawie wszystkich z funkcja $\zeta \mapsto f(z\zeta^{-1})g(\zeta)$ należy do $L_1(\mathbb{T})$ i w konsekwencji wielkość $(f * g)(z)$ jest dobrze zdefiniowana dla prawie wszystkich z . Co więcej $f * g \in L_1(\mathbb{T})$ i $\|f * g\|_1 \leq \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} H \, d(m \otimes m) = \|f\|_1 \|g\|_1$. $\square$

STWIERDZENIE

Operacja

$$L_1(\mathbb{T}) \times L_1(\mathbb{T}) \ni (f, g) \longmapsto f * g \in L_1(\mathbb{T})$$

jest przemienna, łączna i dwuliniowa.

DOWÓD

Przypomnijmy, że miara Lebesgue'a na $\mathbb{T}$ jest niezmiennicza względem operacji $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^{-1} \in \mathbb{T}$, tj. jeśli $h \in L_1(\mathbb{T})$, to funkcja $z \mapsto h(z^{-1})$ także należy do $L_1(\mathbb{T})$ i

$$\int_{\mathbb{T}} h(z^{-1}) \, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} h(z) \, dm(z).$$

Teraz korzystając z tego oraz z niezmienniczości m na prawe przesunięcia i przemienności mnożenia w $\mathbb{T}$ obliczamy

$$\begin{aligned} (g * f)(z) &= \int_{\mathbb{T}} g(z\zeta^{-1})f(\zeta) \, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} g(z(\zeta z)^{-1})f(\zeta z) \, dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} g(\zeta^{-1})f(\zeta z) \, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} g(\zeta)f(z\zeta^{-1}) \, dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})g(\zeta) \, dm(\zeta) = (f * g)(z). \end{aligned}$$

DOWÓD

Dla dowodu łączności spłotu skorzystamy z łączności mnożenia w $\mathbb{T}$, niezmienniczości m na przesunięcia i twierdzenia Fubiniiego: niech $f, g, h \in L_1(\mathbb{T})$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 (f * (g * h))(z) &= \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})(g * h)(\zeta) \, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1}) \left(\int_{\mathbb{T}} g(\zeta\gamma^{-1})h(\gamma) \, dm(\gamma) \right) dm(\zeta) \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})g(\zeta\gamma^{-1}) \, dm(\zeta) \right) h(\gamma) \, dm(\gamma) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z(\zeta\gamma)^{-1})g((\zeta\gamma)\gamma^{-1}) \, dm(\zeta) \right) h(\gamma) \, dm(\gamma) \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z\gamma^{-1}\zeta^{-1})g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) h(\gamma) \, dm(\gamma) = \int_{\mathbb{T}} (f * g)(z\gamma^{-1})h(\gamma) \, dm(\gamma) = ((f * g) * h)(z).
 \end{aligned}$$

W końcu dwuliniowość $f * g$ względem f i g jest jasna z definicji spłotu. □

TWIERDZENIE

Dla $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ i dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ mamy $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$.

DOWÓD

Ponownie korzystamy z niezmienniczości miary Lebesgue'a na przesunięcia i twierdzenia Fubiniiego:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f * g}(n) &= \int_{\mathbb{T}} z^{-n} (f * g)(z) \, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} z^{-n} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} (z\zeta^{-1})^{-n} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} (z\zeta^{-1})^{-n} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(z) \right) dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} (z\zeta^{-1})^{-n} f(z\zeta^{-1}) \, dm(z) \right) \zeta^{-n} g(\zeta) \, dm(\zeta) \\
 &= \left(\int_{\mathbb{T}} (z)^{-n} f(z) \, dm(z) \right) \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) = \hat{f}(n)\hat{g}(n).
 \end{aligned}$$



- **Algebrą Banacha** nazywamy przestrzeń Banacha $(A, \|\cdot\|)$ wyposażona w dwuliniowe łączne mnożenie $(a, b) \mapsto ab$ takie, że

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad a, b \in A.$$

Powyżej pokazaliśmy, że operacja splotu definiuje na $L_1(\mathbb{T})$ strukturę przemiennej algebry Banacha. Zauważmy, że algebra ta nie ma jedynki.

- Przestrzeń $c_0(\mathbb{Z})$ także jest przemianą algebrą Banacha względem operacji punktowego mnożenia ciągów.
- Ostatnie twierdzenie mówi, że

$$L_1(\mathbb{T}) \ni f \longmapsto \hat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$$

jest **homomorfizmem algebr Banacha**.

- Przypomnijmy wyrażenie na jądro Dirichleta:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}x)} & x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{2N+1}{2\pi} & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

STWIERDZENIE

Mamy $\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$.

DOWÓD

Skoro $\sin x \leq x$ dla $x \geq 0$, mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau = 2 \int_0^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\tau)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \right| d\tau \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\tau)}{\tau} \right| d\tau.$$

Teraz dzielimy $[0, \pi]$ na $2N + 1$ przedziałów $[\frac{n\pi}{2N+1}, \frac{(n+1)\pi}{2N+1}]$ ($n = 0, \dots, 2N$). Na każdym takim przedziale czynnik $\frac{1}{\tau}$ jest większy niż $\frac{2N+1}{(n+1)\pi}$, a więc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{2N} \int_{\frac{n\pi}{2N+1}}^{\frac{(n+1)\pi}{2N+1}} \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})\tau)|}{\tau} d\tau \geq \frac{2(2N+1)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1} \int_{\frac{n\pi}{2N+1}}^{\frac{(n+1)\pi}{2N+1}} |\sin((N + \frac{1}{2})\tau)| d\tau.$$

DOWÓD

Dalej zauważmy, że

$$\int_{\frac{n\pi}{2N+1}}^{\frac{(n+1)\pi}{2N+1}} \left| \sin\left((N + \frac{1}{2})\tau\right) \right| d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2N+1}} \sin\left((N + \frac{1}{2})\tau\right) d\tau,$$

a stąd

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau &\geq \frac{2(2N+1)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2N+1}} \sin\left((N + \frac{1}{2})\tau\right) d\tau \\ &= \frac{2(2N+1)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

która to wielkość dąży do $+\infty$ gdy $N \rightarrow \infty$.



LEMAT

Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje $f_N \in C([-\pi, \pi])$ taka, że $f_N(-\pi) = f_N(\pi)$, $\|f_N\|_\infty = 1$ i

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) f_N(\tau) \, d\tau > \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau.$$

DOWÓD

Podzielmy przedział $[-\pi, \pi]$ na podprzedziały, na których D_N ma stały znak:

$$[-\pi, \pi] = \left[-\pi, -\frac{N\pi}{N+\frac{1}{2}}\right] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{N-1} \left[-\frac{N(n+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}\right]\right) \cup \left[-\frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}\right] \\ \cup \left(\bigcup_{n=1}^{N-1} \left[\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{(n+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}\right]\right) \cup \left[\frac{N\pi}{N+\frac{1}{2}}, \pi\right]$$

Następnie ustalmy $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2N+1}[$ i rozważmy funkcję g_ε zdefiniowaną oddzielnie dla każdego $[a, b]$ z powyższej sumy:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(D_N\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\varepsilon^{-1}(x-a) & x \in [a, a+\varepsilon[\\ \operatorname{sgn}\left(D_N\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) & x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \\ \operatorname{sgn}\left(D_N\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\varepsilon^{-1}(b-x) & x \in]b-\varepsilon, b] \end{cases}$$

DOWÓD

Funkcja g_ε jest ciągła i spełnia $\|g_\varepsilon\|_\infty = 1$ oraz $g_\varepsilon(-\pi) = g_\varepsilon(\pi) = 0$. Ponadto na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) g_\varepsilon(\tau) \, d\tau \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau.$$

Definiujemy f_N jako taką funkcję g_ε , dla której

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) g_\varepsilon(\tau) \, d\tau > \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau.$$



TWIERDZENIE

Istnieje funkcja $f \in C([-\pi, \pi])$ taka, że $f(-\pi) = f(\pi)$, dla której ciąg $(s_N(f, 0))_{N \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny.

DOWÓD

Niech X będzie podprzestrzenią $C([-\pi, \pi])$ składającą się z funkcji o równych wartościach na końcach przedziału. Jest jasne, że X jest domkniętą podprzestrzenią $C([-\pi, \pi])$, a więc X jest przestrzenią Banacha. Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ niech Θ_N będzie funkcjonałem

$$X \ni g \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) g(\tau) d\tau \in \mathbb{C}.$$

Jest jasne, że Θ_N jest ciągły: $|\Theta_N(g)| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau \right) \|g\|_{\infty}$ ($g \in X$) i mamy $\Theta_N(g) = s_N(g, 0)$ dla każdej funkcji $g \in X$ i każdego $N \in \mathbb{N}$.

TWIERDZENIE

Istnieje funkcja $f \in C([-\pi, \pi])$ taka, że $f(-\pi) = f(\pi)$, dla której ciąg $(s_N(f, 0))_{N \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny.

DOWÓD

Jeśli dla każdej $f \in X$ ciąg $(s_N(f, 0))_{N \in \mathbb{N}}$ byłby zbieżny, to – w szczególności – rodzina funkcjonałów $\{\Theta_n\}_{N \in \mathbb{N}}$ miałaby tę własność, że zbiór

$$\{\Theta_N(f) \mid N \in \mathbb{N}\}$$

byłby ograniczony dla każdej $f \in X$. Wówczas na mocy twierdzenia Banacha-Steinhausa istniałaby stała $C > 0$ taka, że $\|\Theta_N\| \leq C$ dla wszystkich N . Jednak udowodniony wcześniej lemat mówi, że

$$\|\Theta_N\| \geq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty.$$



TWIERDZENIE CARLESONA-HUNTA

Niech $p \in]1, +\infty]$ i niech $f \in L_p([-\pi, \pi])$. Wówczas

$$s_N(f, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t)$$

dla prawie wszystkich $t \in [-\pi, \pi]$.

UWAGA

Dla $p = 2$ stosunkowo łatwo uzyskaliśmy wynik, że powyższa zbieżność zachodzi dla pewnego podciągu ciągu $(\sigma_N(f, \cdot))_{N \in \mathbb{N}}$.