

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 12

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

- Dla $f \in L_1([-\pi, \pi])$ mamy $s_N(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$.
- Połóżmy $\sigma_N(f, t) = \frac{1}{N+1} (s_0(f, t) + \dots + s_N(f, t))$.
- Jeśli dla danego $t \in [-\pi, \pi]$ istnieje $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f, t)$, to oczywiście istnieje też $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f, t)$ i granice te są sobie równe.
- Mamy

$$\sigma_N(f, t) = \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^N s_K(f, t) = \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{K=0}^N \sum_{n=-K}^K \hat{f}(n) e^{int}$$

(w podwójnej sumie po prawej stronie wyraz $\hat{f}(0)e^{i0t}$ pojawia się $N+1$ razy, wyrazy $\hat{f}(1)e^{i1t}$ i $\hat{f}(-1)e^{i(-1)t}$ występują N razy itd. aż do $\hat{f}(N)e^{iNt}$ oraz $\hat{f}(-N)e^{i(-N)t}$, które pojawiają się tylko raz).

- Stąd

$$\sigma_N(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} \hat{f}(n) e^{int}$$

i w konsekwencji

$$\sigma_N(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau e^{int} = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcję K_N nazywamy **jądrem Fejéra**.

LEMAT

Dla $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ mamy

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \right)^2,$$

natomiast $K_N(x) = \frac{N+1}{2\pi}$ dla $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

DOWÓD

Rozważmy wyrażenie $\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2$. Mamy

$$\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2 = \sum_{m,n=0}^N e^{i(m+n-N)x} = e^{-iNx} \sum_{m,n=0}^N e^{i(m+n)x}.$$

Teraz pogrupujemy wyrazy, w których $m+n=k$ i zsumujemy po k . Wielkość $m+n$ ma wartości od 0 do $2N$ i każde $k=m+n$ występuje $N+1-|k-N|$ razy. Stąd

$$\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2 = e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} (N+1-|k-N|) e^{ikx} = \sum_{k=0}^{2N} (N+1-|k-N|) e^{i(k-N)x}.$$

Wreszcie zamieniając sumowanie po $k \in \{0, \dots, 2N\}$ na sumowanie po $n = k - N \in \{-N, \dots, N\}$ otrzymujemy

$$\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2 = \sum_{n=-N}^N (N+1-|n|) e^{inx}.$$

DOWÓD

W świetle wzoru $K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} e^{inx}$ dostajemy

$$\begin{aligned} K_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(e^{-i\frac{N}{2}x} \sum_{n=0}^N (e^{ix})^n \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(e^{-i\frac{N}{2}x} \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{e^{-i\frac{N}{2}x} - e^{i(\frac{N}{2}+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{e^{-i\frac{N+1}{2}x} - e^{i\frac{N+1}{2}x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2 \end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Wartość $K_N(x)$ dla $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ obliczamy bezpośrednio ze wzoru $K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} e^{inx}$. □

- $K_N \geq 0$.
- K_N jest funkcją parzystą (w szczególności K_N definiuje funkcję na $\mathbb{T}$).

STWIERDZENIE

- ① $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\tau) d\tau = 1$ dla wszystkich N ,
- ② dla dowolnej $\delta > 0$ ciąg $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ dąży jednostajnie do 0 na $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

DOWÓD

Ad ❶ Mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\tau} d\tau = 1$$

(niezerowa jest tylko całka dla $n = 0$).Ad ❷ Dla $x \in [-\pi, \pi]$ takiego, że $|x| \geq \delta$ mamy $(\sin(\frac{1}{2}x))^2 \geq (\sin(\frac{1}{2}\delta))^2$. Stąd

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\delta)} \right)^2.$$

Wynika stąd, że $K_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ jednostajnie na $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. □

TWIERDZENIE FEJÉRA

Niech $f \in C([-\pi, \pi])$ spełnia $f(-\pi) = f(\pi)$. Wówczas aproksymacje $t \mapsto \sigma_N(f, t)$ zbiegają do f jednostajnie, gdy $N \rightarrow \infty$.

DOWÓD

Skoro f jest ciągła i $f(-\pi) = f(\pi)$, możemy ją rozszerzyć do okresowej funkcji $\tilde{f}$ na $\mathbb{R}$. Zauważmy, że funkcja $\tilde{f}$ jest jednostajnie ciągła.

Wiemy, że $\sigma_N(f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(\tau) d\tau$, a więc dla każdego $N \in \mathbb{N}$ i $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f, t) - f(t)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(\tau) d\tau - f(t) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(\tau) d\tau - \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(t) d\tau \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)(f(\tau) - f(t)) d\tau \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)|f(\tau) - f(t)| d\tau \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)|\tilde{f}(\tau) - \tilde{f}(t)| d\tau = \int_{t-\pi}^{t+\pi} K_N(s)|\tilde{f}(t - s) - \tilde{f}(t)| ds. \end{aligned}$$

DOWÓD

Funkcja pod ostatnią całką jest okresowa, więc możemy przesunąć przedział całkowania nie zmieniając wartości całki. Stąd

$$|\sigma_N(f, t) - f(t)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds.$$

Dalej dla $\delta \in]0, \pi[$ możemy przepisać prawą stronę ostatniego równania w następujący sposób:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds + \int_{\delta}^{\pi} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds + \int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds.$$

Nietrudno się przekonać, że każdy z pierwszych dwóch wyrazów powyższej sumy jest mniejszy niż $2\pi \|f\|_{\infty} \max_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_N(s)$.

DOWÓD

Wreszcie całkę $\int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds$ możemy oszacować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds &\leq \max_{|x-y| \leq \delta} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) \, ds \\ &\leq \max_{|x-y| \leq \delta} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(s) \, ds = \max_{|x-y| \leq \delta} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \end{aligned}$$

(w ostatnim kroku ponownie skorzystaliśmy z faktu, że $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(s) \, ds = 1$).

Ponieważ $\tilde{f}$ jest jednostajnie ciągła, dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_\varepsilon \in]0, \pi[$ taka, że

$$\max_{|x-y| \leq \delta_\varepsilon} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

DOWÓD

W szczególności dla tak dobranej δ_ε mamy

$$|\sigma_N(f, t) - f(t)| \leq 4\pi \|f\|_\infty \max_{\delta_\varepsilon \leq |s| \leq \pi} K_N(s) + \frac{\varepsilon}{2}$$

A stąd

$$|\sigma_N(f, t) - f(t)| < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych N . □

UWAGA

Zauważmy, że powyższy dowód pokazuje, że jeśli f jest ograniczona i ciągła w punkcie $t \in]-\pi, \pi[$, to $\sigma_N(f, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t)$. Podobnie jest dla $t = \pm\pi$, jeśli $f(-\pi) = f(\pi)$.

STWIERDZENIE

Niech $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$ będzie taka, że ciąg $(\hat{\psi}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ jest sumowalny. Wówczas ψ jest ciągła i szereg

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) e^{int}$$

jest zbieżny jednostajnie do ψ na $[-\pi, \pi]$.

DOWÓD

Wiemy, że

$$\sum_{n=-N}^N \hat{\psi}(n) \phi_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \psi$$

w $L_2([-\pi, \pi])$, a więc istnieje ściśle rosnąca funkcja $\mathbb{N} \ni k \mapsto N_k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N_k}^{N_k} \hat{\psi}(n) e^{int} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi(t)$$

dla prawie wszystkich t . Z drugiej strony szereg $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) e^{int}$ jest zbieżny jednostajnie na mocy kryterium Weierstrassa. □

TWIERDZENIE

Niech f będzie ocięciem do $[-\pi, \pi]$ funkcji okresowej na $\mathbb{R}$ klasy C^1 . Wówczas ciąg $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ jest sumowalny.

DOWÓD

Całkując przez części i pamiętając, że f jest okresowa (o okresie 2π) obliczamy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f'(t) dt = \frac{in}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt = in \hat{f}(n).$$

Stąd $(n\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem współczynników Fouriera ciągłej (a więc całkowalnej z kwadratem) funkcji $-if'$. W szczególności współczynniki te są sumowalne z kwadratem, a więc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} |n\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |n\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$



TWIERDZENIE DINI'EGO

Niech f będzie funkcją całkowalną na $[-\pi, \pi]$, $t \in]-\pi, \pi[$ oraz $a \in \mathbb{C}$. Jeśli istnieje $\theta \in]0, \pi[$ taka, że

$$\int_0^\theta \left| \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2a}{\tau} \right| d\tau < +\infty$$

(jeśli argument wypada poza $[-\pi, \pi]$, to rozszerzamy f periodycznie). Wówczas

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f, t) = a.$$

DOWÓD

Rozszerzamy f do funkcji okresowej na $\mathbb{R}$. Mamy

$$s_N(f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_{t-\pi}^{t+\pi} D_N(u) f(t - u) du.$$

Dzięki okresowości f i D_N możemy przsunąć przedział całkowania otrzymując

$$\begin{aligned} s_N(f, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s) f(t - s) ds = \int_{-\pi}^0 D_N(s) f(t - s) ds + \int_0^{\pi} D_N(s) f(t - s) ds \\ &= \int_0^{\pi} D_N(s') f(t + s') ds' + \int_0^{\pi} D_N(s) f(t - s) ds = \int_0^{\pi} D_N(\tau) (f(t + \tau) ds + f(t - \tau)) d\tau \end{aligned}$$

(funkcja D_N jest parzysta).

DOWÓD

Stąd

$$\begin{aligned}
s_N(f, t) - a &= \int_0^\pi D_N(\tau) (f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau)) \, d\tau - 2a \int_0^\pi D_N(\tau) \, d\tau = \int_0^\pi D_N(\tau) (f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a) \, d\tau \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\tau)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}\tau)} (f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a) \, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin((N + \frac{1}{2})\tau) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \frac{f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a}{\tau} \, d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(N\tau) \cos(\frac{1}{2}\tau) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \frac{f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a}{\tau} \, d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(N\tau) \sin(\frac{1}{2}\tau) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \frac{f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a}{\tau} \, d\tau.
\end{aligned}$$

Nasze założenie gwarantuje, że funkcja $\tau \mapsto \frac{f(t+\tau) \, ds + f(t-\tau) - 2a}{\tau} \, d\tau$ jest całkowalna na przedziale $[0, \theta]$, a skoro jest ewidentnie całkowalna na $[\theta, \pi]$, jest ona również całkowalna na $[0, \pi]$.

DOWÓD

Wynika stąd, że funkcje

$$g_1(\tau) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin\left(\frac{1}{2}\tau\right)} \frac{f(t+\tau) \, ds + f(t-\tau) - 2a}{\tau} & \tau \in]0, \pi] \\ 0 & \tau \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

oraz

$$g_2(\tau) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin\left(\frac{1}{2}\tau\right)} \frac{f(t+\tau) \, ds + f(t-\tau) - 2a}{\tau} & \tau \in]0, \pi] \\ 0 & \tau \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

należą do $L_1([-\pi, \pi])$.

DOWÓD

Dlatego, na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a, mamy

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(N\tau) g_1(\tau) d\tau = -i\sqrt{2\pi}(\widehat{g_1}(-N) - \widehat{g_1}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

i

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(N\tau) g_1(\tau) d\tau = \sqrt{2\pi}(\widehat{g_1}(-N) + \widehat{g_1}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

a w konsekwencji $s_N(f, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a$.



- Niech f będzie funkcją na przedziale zawierającym punkt x_0 .
- Powiemy, że f jest **hölderowsko ciągła** w x_0 z **wykładnikiem Höldera** $\alpha > 0$, jeśli istnieje $C > 0$ takie, że

$$|f(x_0 + y) - f(x_0)| \leq C|y|^\alpha$$

dla dostatecznie małych y .

TWIERDZENIE LIPSCHITZA-HÖLDERA

Niech f będzie funkcją całkowalną na $[-\pi, \pi]$. Załóżmy, że f jest hölderowsko ciągła w punkcie $t_0 \in]-\pi, \pi[$. Wówczas $s_N(f, t_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t_0)$.

DOWÓD

Stosujemy twierdzenie Dini'ego z $t = t_0$ and $a = f(t_0)$. Dla $\tau \in]0, \pi]$ mamy

$$\left| \frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)-2f(t_0)}{\tau} \right| \leq \left| \frac{f(t_0+\tau)-f(t_0)}{\tau} \right| + \left| \frac{f(t_0-\tau)-f(t_0)}{\tau} \right| \leq \frac{2C}{\tau^{1-\alpha}},$$

gdzie C i α są stałą i wykładnikiem z definicji hölderowskiej ciągłości f w t_0 . W końcu dla dowolnego $\sigma > 0$ mamy

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} < +\infty$$

bo $\alpha > 0$.