

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 13

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

- Dla $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ definiujemy

$$\hat{f}(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x) \, dx,$$

gdzie $p \cdot x = \sum_{i=1}^d x^i p^i$.

- Łatwo sprawdzamy, że $\hat{f}$ jest funkcją ograniczoną:

$$|\hat{f}(p)| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx = \|f\|_1,$$

a więc $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

- Z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej łatwo wynika też, że $\hat{f}$ jest funkcją ciągłą, a więc $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym operatorem $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^d)$.

PRZYKŁADY

- ❶ Dla $H(x) = e^{-(|x_1|+\dots+|x_d|)}$ mamy

$$\hat{H}(p) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+p_j^2}, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

- ❷ Niech A będzie dodatnią macierzą $\times n$ o zerowym jądrze (czyli taką, że $x \mapsto x \cdot Ax$ jest ściśle dodatnią formą kwadratową) i niech $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x \cdot Ax}$. Wtedy

$$\hat{f}(p) = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}p \cdot A^{-1}p}, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

PRZYKŁADY

③ Dla ustalonego $s > 0$ zdefiniujemy

$$G_s(x) = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r}{2} - \frac{\|x\|^2}{2r}} r^{-\frac{d-s+2}{2}} dr, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

gdzie $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{\frac{s}{2}-1} dr$. Wówczas G_s jest całkowalna ($\|G_s\|_1 = (2\pi)^{\frac{d}{2}}$) i

$$\widehat{G_s}(p) = (1 + \|p\|^2)^{-\frac{s}{2}}, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

- Dla $y \in \mathbb{R}^d$ zdefiniowaliśmy operator translacji τ_y kładąc

$$(\tau_y f)(x) = f(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Mamy też operator ϵ_y dany wzorem

$$(\epsilon_y f)(x) = e^{ix \cdot y} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Wreszcie operator skalowania S_a ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$(S_a f)(x) = f(ax), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

STWIERDZENIE

Niech $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Wtedy

- 1 dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^d$ mamy $\widehat{\tau_y f} = \epsilon_{-y} \hat{f}$,
- 2 dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^d$ mamy $\widehat{\epsilon_y f} = \tau_y \hat{f}$,
- 3 dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy $\widehat{S_a f} = |a|^{-d} S_{a^{-1}} \hat{f}$.

TWIERDZENIE

Niech $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Wtedy $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \hat{g}$.

DOWÓD

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \widehat{f * g}(p) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} (f * g)(x) dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) dy \right) dx \\
 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x - y) g(y) dy \right) dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x - y) g(y) dx \right) dy \\
 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x - y) dx \right) g(y) dy = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot (x - y)} f(x - y) dx \right) e^{-ip \cdot y} g(y) dy \\
 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot z} f(z) dz \right) e^{-ip \cdot y} g(y) dy = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot z} f(z) dz \right) e^{-ip \cdot y} g(y) dy \\
 &= \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot z} f(z) dz \right) \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot y} g(y) dy \right) = \hat{f}(p) \hat{g}(p).
 \end{aligned}$$



- **Przestrzenia Schwartza** nazywamy przestrzeń tych $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, które spełniają

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}^\alpha (\partial^\beta f)(\mathbf{x})| < +\infty$$

dla wszystkich wielowskaźników $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$. Oznaczamy ją symbolem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

- Przestrzeń Schwarza jest wyposażona w rodzinę norm $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^d}$

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \|\mathbf{x}^\alpha \partial^\beta f\|_\infty = \|\mathbf{x}^\alpha D^\beta f\|_\infty,$$

gdzie $D^\beta = (-i)^{|\beta|} \partial^\beta$.

TWIERDZENIE

Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Wtedy

- ❶ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ mamy $\widehat{D^\alpha f} = \mathbf{x}^\alpha \widehat{f}$,
- ❷ dla dowolnego $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ mamy $D^\beta \widehat{f} = (-1)^{|\beta|} \widehat{\mathbf{x}^\beta f}$.

WNIOSEK

Transformacja Fouriera $f \mapsto \widehat{f}$ jest topologicznym izomorfizmem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Odwzorowanie odwrotne $g \mapsto \check{g}$ dane jest wzorem

$$\check{g}(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ip \cdot x} g(p) \, dp, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

PRZYKŁAD

Rozważmy funkcję gaussowską

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Oznaczając $g = \widehat{f}$ mamy

$$g' = iD\widehat{f} = -i\widehat{xf} = i\widehat{f'} = -\widehat{Df} = -\widehat{xf} = -xg.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie różniczkowe i otrzymujemy

$$g(p) = C \exp\left(-\int_0^p x \, dx\right) = Ce^{-\frac{p^2}{2}}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Wreszcie } C = g(0) = \widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1.$$

TWIERDZENIE

Dla każdego $p \in [1, +\infty]$ mamy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_p(\mathbb{R}^d)$. Włózenie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^d)$ jest ciągłe, a dla $p < +\infty$ ma gęsty obraz.

DOWÓD

Przypadek $p = +\infty$ jest oczywisty. Rozważmy przypadek $p = 1$. Wybierzmy N tak duże, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^{-N} dx < +\infty.$$

Wtedy dla każdej $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^{-N} (1 + \|x\|^2)^N |f(x)| dx \leq C_N \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^N |f(x)| \right),$$

gdzie $C_N = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^{-N} dx$.

DOWÓD

Ponadto supremum po x wyrażenia

$$\begin{aligned}
 (1 + \|x\|^2)^N |f(x)| &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \|x\|^{2k} |f(x)| = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^k |f(x)| \\
 &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_d = k \\ \lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0}} \frac{k!}{\lambda_1! \dots \lambda_d!} |x_1|^{2\lambda_1} \dots |x_d|^{2\lambda_d} |f(x)| \\
 &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d \\ |\lambda| = k}} \frac{k!}{\lambda_1! \dots \lambda_d!} |(\mathbf{x}^{2\lambda} f)(x)|,
 \end{aligned}$$

majoryzuje się kombinacją liniową norm $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$. Wynika stąd po pierwsze, że $\|f\|_1 < +\infty$, a po drugie, że włożenie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_1(\mathbb{R}^d)$ jest ciągłe.

DOWÓD

W przypadku $p \in]1, +\infty[$ zauważamy, że

$$\|f\|_p = \left\| |f|^{\frac{1}{p}} |f|^{1-\frac{1}{p}} \right\|_p \leq \| |f|^{1-\frac{1}{p}} \|_{\infty} \| |f|^{\frac{1}{p}} \|_p = (\|f\|_{\infty})^{1-\frac{1}{p}} (\|f\|_1)^{\frac{1}{p}},$$

a stąd $\|f\|_p < +\infty$ dla wszystkich $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i jeśli $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, to mamy $\|f_n\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

W końcu fakt, że $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jest gęstą podprzestrzenią w $L_p(\mathbb{R}^d)$ dla wszystkich $p \in]1, +\infty[$ wynika natychmiast z tego, że $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

TWIERDZENIE (LEMAT RIEMANNA-LEBESGUE'A)

Dla dowolnej $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mamy $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

- Odwzorowanie $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym operatorem $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$,
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jest gęstą podprzestrzenią $L_1(\mathbb{R}^d)$,
- dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$,
- $C_0(\mathbb{R}^d)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.



- Tak samo jak wykazaliśmy, że dla dowolnego $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ funkcja

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \tau_y \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$$

jest ciągła, można wykazać, że dla dowolnego $p \in [1, +\infty[$ i dowolnej $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ funkcja

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \tau_y f \in L_p(\mathbb{R}^d)$$

jest ciągła.

WNIOSEK

Niech $p \in [1, +\infty[$ i $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ wówczas funkcja

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \|\tau_y f - f\|_p^p \in [0, +\infty[$$

jest ciągła i ograniczona.

- Niech h będzie nieujemną funkcją mierzalną na $\mathbb{R}^d$ taką, że $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = 1$.
- Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

LEMAT

Niech $k \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ będzie ciągłą w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Wtedy $(h_\varepsilon * k)(x_0) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} k(x_0)$.

DOWÓD

Mamy

$$\begin{aligned}
 |(h_\varepsilon * k)(x_0) - k(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(x_0 - y)k(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z)k(x_0) \, dz \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z)k(x_0 - z) \, dz - \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z)k(x_0) \, dz \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z) |k(x_0 - z) - k(x_0)| \, dz = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d} h\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \left| k(x_0 - \varepsilon \frac{z}{\varepsilon}) - k(x_0) \right| \, dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} h(s) |k(x_0 - \varepsilon s) - k(x_0)| \, ds.
 \end{aligned}$$

Funkcje $s \mapsto h(s) |k(x_0 - \varepsilon s) - k(x_0)|$ zbiegają punktowo do 0 ponieważ k jest ciągła w x_0 i wszystkie są ograniczone przez $2\|k\|_\infty h$. Stąd na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej

$$|(h_\varepsilon * k)(x_0) - k(x_0)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} h(s) |k(x_0 - \varepsilon s) - k(x_0)| \, ds \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} 0.$$

