

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 14

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

- $h \in L_1(\mathbb{R}^d)$,
- $h \geq 0$,
- $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = 1$,
- $h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

TWIERDZENIE

Dla dowolnej $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$h_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} f$$

w $L_1(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Tak jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, dla dowolnego x mamy

$$\begin{aligned} |(h_\epsilon * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(x - y) f(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) \, dz f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) f(x - z) \, dz - \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) f(x) \, dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) (f(x - z) - f(x)) \, dz \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) |f(x - z) - f(x)| \, dz. \end{aligned}$$

DOWÓD

Teraz całkujemy obie strony otrzymanej nierówności po x :

$$\begin{aligned}\|h_\epsilon * f - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) \|\tau_z f - f\|_1 \, dz = \int_{\mathbb{R}^d} \|f - \tau_{-z} f\|_1 h_\epsilon(z) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k(0 - z) h_\epsilon(z) \, dz = (k * h_\epsilon)(0) = (h_\epsilon * k)(0),\end{aligned}$$

gdzie $k(z) = \|\tau_z f - f\|_p^p$ ($z \in \mathbb{R}^d$). Funkcja k jest ciągła i ograniczona, a więc

$$(h_\epsilon * k)(0) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} k(0) = 0$$

na mocy lematu. □

TWIERDZENIE

Niech $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ będzie taka, że $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ i połóżmy

$$g(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} \hat{f}(p) \, dp, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Wówczas $g \doteq f$.

DOWÓD

Rozważmy funkcję

$$H(p) = e^{-(|p_1| + \dots + |p_d|)}, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

Skoro H jest ciągła, ograniczona i spełnia $H(0) = 1$, a $\hat{f}$ jest całkowalna, na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^d$ mamy $g(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} g_\varepsilon(x)$, gdzie

$$g_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(\varepsilon p) \hat{f}(p) dp, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dalej zdefiniujmy funkcję h kładąc

$$h(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(p) dp, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(tj. $h = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} S_{-1} \hat{H}$).

DOWÓD

Mamy $h(x) = \pi^{-d} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+x_j^2}$ i w konsekwencji

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = \pi^{-d} \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{1+x_j^2} = \pi^{-d} \prod_{j=1}^d \arctan(x_j) \Big|_{x_j=-\infty}^{+\infty} = 1.$$

a stosując twierdzenie Fubiniego otrzymujemy

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(\varepsilon p) \hat{f}(p) dp = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(\varepsilon p) \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot y} f(y) dy \right) dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot p} H(\varepsilon p) dp \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \frac{x-y}{\varepsilon} \cdot \varepsilon p} H(\varepsilon p) d(\varepsilon p) \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \frac{x-y}{\varepsilon} \cdot p'} H(p') dp' \right) f(y) dy = (h_\varepsilon * f)(x) \end{aligned}$$

DOWÓD

Teraz z poprzedniego twierdzenia wiemy, że

$$g_\varepsilon = h_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} f$$

w $L_1(\mathbb{R}^d)$ i w konsekwencji istnieje ciąg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $g_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ prawie wszędzie, a stąd $g = f$ prawie wszędzie. $\square$

WNIOSEK

Transformacja Fouriera jest injektywnym operatorem $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Z lematu Riemanna-Lebesgue'a wiemy, że obraz odwzorowania $f \mapsto \hat{f}$ zawiera się w $C_0(\mathbb{R}^d)$. Jeśli $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ spełnia $\hat{f} = 0$, to oczywiście $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, a więc $f = 0$ wynika natychmiast z ostatniego twierdzenia. □

ZASTOSOWANIE INJEKTYWNOŚCI TRANSFORMACJI FOURIERA

Niech ρ będzie ściśle dodatnią funkcją na przedziale $]a, b[$ taką, że istnieje $\varepsilon > 0$, dla którego

$$\int_a^b e^{\varepsilon|x|} \rho(x) \, dx < +\infty.$$

Wówczas zbiór funkcji wielomianowych na $]a, b[$ jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $L_2(]a, b[, \rho)$.

SZKIC DOWODU

Po pierwsze dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ mamy $|x^k| \leq \frac{k!}{\varepsilon^k} e^{\varepsilon|x|}$, a więc dla każdego k funkcja x^k jest całkowalna względem miary $\rho(x)dx$. W szczególności x^{2k} jest całkowalna, czyli x^k jest całkowalna z kwadratem, a w konsekwencji wszystkie funkcje wielomianowe są całkowalne z kwadratem.

Weźmy $\psi \in L_2(]a, b[, \rho)$. Wtedy, ponieważ funkcja $x \mapsto e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|}$ jest całkowalna z kwadratem, funkcja $x \mapsto e^{\frac{\varepsilon}{2}x}\psi(x)$ jest całkowalna. Nietrudno stąd wywnioskować, że funkcja

$$F(z) = \int_a^b e^{-izx} \psi(x) \rho(x) dx, \quad |\operatorname{Im} z| < \frac{\varepsilon}{2}$$

jest holomorficzna.

SZKIC DOWODU

Co więcej, dla $n \in \mathbb{Z}_+$ mamy

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_a^b x^n \psi(x) \rho(x) dx.$$

Teraz przypuśćmy, że ψ jest ortogonalna do przestrzeni wszystkich funkcji wielomianowych. Wtedy $F^{(n)}(0) = 0$ dla każdego n , a więc $F = 0$. Ale $F|_{\mathbb{R}}$ jest transformatą Fouriera całkowalnej funkcji $x \mapsto \sqrt{2\pi} \psi(x) \rho(x) \mathbf{1}_{]a,b[}$, a więc $\rho \psi = 0$, co pociąga $\psi = 0$. $\square$

TWIERDZENIE

Odwzorowanie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ rozszerza się do unitarnego operatora $L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Weźmy $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Korzystając z twierdzenia Fubiniego i odwracalności transformacji Fouriera obliczamy

$$\begin{aligned} \langle \hat{f} | \hat{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(p)} \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} g(x) dx \right) dp = \int_{\mathbb{R}^d} \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(p)} e^{-ip \cdot x} dp \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(p) e^{ix \cdot p} dp \right)} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle f | g \rangle. \end{aligned}$$

Stąd odwzorowanie $f \mapsto \hat{f}$ jest izometrią dla normy $\| \cdot \|_2$. Jako że $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jest gęstą podprzestrzenią $L_2(\mathbb{R}^d)$, odwzorowanie to rozszerza się jednoznacznie do izometrii $L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, która jest surjekcją, gdyż jej obraz zawiera gęstą podprzestrzeń $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

DEFINICJA

Transformacją Fouriera na $L_2(\mathbb{R}^d)$ nazywamy operator unitarny będący jedynym ciągłym rozszerzeniem operacji $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ na $L_2(\mathbb{R}^d)$. Oznaczmy go $\psi \mapsto \hat{\psi}$ ($\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$) lub symbolem $\mathcal{F}$.

UWAGA

Odwzorowanie $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ można również skonstruować w następujący sposób:

- sprawdzamy, że dla $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ mamy $\hat{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$,
- następnie sprawdzamy, że $\|\hat{\psi}\|_2 = \|\psi\|_2$ dla $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$,
- definiujemy $\mathcal{F}$ jako jedyne ciągłe rozszerzenie operacji

$$L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d) \ni \psi \longmapsto \hat{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

STWIERDZENIE

Niech $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ i oznaczmy

$$\phi_n(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} \varphi(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

Wtedy $\phi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{F}\varphi$ w $L_2(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Niech $\varphi_n = \mathbf{1}_{\overline{\text{Ball}}(0,n)} \varphi$. Wówczas $\varphi_n \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$ w $L_2(\mathbb{R}^d)$. Wynika stąd, że $\phi_n = \mathcal{F}\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{F}\varphi$. □

- Przyjmijmy oznaczenie $\mathcal{F}$ także na transformację Fouriera $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$(\mathcal{F}T)(f) = T(\hat{f}), \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

- Dla $s \in \mathbb{R}$ niech $\sigma_s(y) = (1 + \|y\|^2)^{-\frac{s}{2}}$ ($y \in \mathbb{R}^d$) i niech M_{σ_s} oznacza operator mnożenia przez funkcję σ_s .
- Wreszcie niech

$$J_s = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s} \circ \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

STWIERDZENIE

Mamy

$$J_s \circ J_t = J_{s+t}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

a J_0 jest operatorem identycznościowym na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Drugi punkt jest oczywisty. Z kolei

$$\begin{aligned} J_s \circ J_t &= \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_t} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s} \circ M_{\sigma_t} \circ \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s \sigma_t} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_{s+t}} \circ \mathcal{F} = J_{s+t}. \end{aligned}$$

□

- Dla każdego s operator J_s jest odwracalny (z odwrotnym J_{-s}).
- Przypomnijmy, że $L_2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

DEFINICJA

Definiujemy **przestrzeń Sobolewa** H^s

$$H^s = J_s(L_2(\mathbb{R}^d))$$

oraz

$$\|u\|_{2,s} = \|J_{-s}u\|_2, \quad u \in H^s.$$

STWIERDZENIE

$(H^s, \|\cdot\|_{2,s})$ jest przestrzenią Hilberta dla każdego $s \in \mathbb{R}$.

DOWÓD

Z definicji $\|\cdot\|_{2,s}$ jest normą na H^s , a J_s jest izometrią $L_2(\mathbb{R}^d)$ na H^s . Stąd H^s z normą $\|\cdot\|_{2,s}$ jest przestrzenią Banacha izometryczną z przestrzenią Hilberta $L_2(\mathbb{R}^d)$. □

STWIERDZENIE

Ustalmy $s, t \in \mathbb{R}$. Wówczas J_t jest izometrią H^s na H^{s+t} .

DOWÓD

Weźmy $u \in H^s$. Wtedy $u = J_s \psi$ dla pewnego $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Tak więc

$$J_t u = J_t J_s \psi = J_{s+t} \psi$$

należy do H^{s+t} i każdy element H^{s+t} jest tej postaci dla pewnego $u \in H^s$ (jeśli $v \in H^{s+t}$, to mamy $v = J_t u$ dla $u = J_{-t} v = J_s(J_{-(s+t)} v) \in H^s$). Ponadto

$$\|J_t u\|_{2,s+t} = \|J_{-(s+t)} J_t u\|_2 = \|J_{-s} u\|_2 = \|u\|_{2,s},$$

a więc J_t jest izometrią. □

TWIERDZENIE SOBOLEWA O WŁOŻENIU

Niech $s, t \in \mathbb{R}$ będą takie, że $s \leq t$. Wtedy $H^t \subset H^s$ oraz

$$\|u\|_{2,s} \leq \|u\|_{2,t}, \quad u \in H^t.$$

- Zauważmy, że twierdzenie jest oczywiste w przypadku $s = t$. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że $s < t$.

LEMAT

Niech $s > 0$. Wówczas dla każdego $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ mamy $J_s \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ oraz

$$\|J_s \psi\|_2 \leq \|\psi\|_2, \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

- Przypomnijmy, że dla $s > 0$ mamy $\sigma_s = \widehat{G_s}$, gdzie G_s jest pewną funkcją całkowalną.

DOWÓD LEMATU

Założmy na razie, że $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$. Wtedy

$$\widehat{J_s \psi}(y) = \sigma_s(y) \hat{\psi}(y) = \widehat{G_s}(y) \hat{\psi}(y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \widehat{G_s * \psi}(y).$$

Innymi słowy $J_s \psi = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} G_s * \psi$. Stąd dla $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ mamy $J\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ and $\|J_s \psi\|_2 \leq \|(2\pi)^{-\frac{d}{2}} G_s\|_1 \|\psi\|_2 = \|\psi\|_2$.

Wynika stąd, że dla $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ mamy $J_s \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ i $\|J_s \psi\|_2 \leq \|\psi\|_2$. Tak więc teza wynika z gęstości $L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ w $L_2(\mathbb{R}^d)$. □