

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 15

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

DOWÓD TWIERDZENIA SOBOLEWA

Weźmy $u \in H^t$. Wówczas $u = J_t \psi$ dla jedyne go $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ (dokładniej $\psi = J_{-t}u$). Stąd

$$J_{-s}u = J_{t-s}J_{-t}u = J_{t-s}\psi$$

należy do $L_2(\mathbb{R}^d)$ na mocy lematu. Dalej

$$\|J_{-s}u\|_2 = \|J_{t-s}\psi\|_2 \leq \|\psi\|_2$$

(ponieważ $t - s > 0$). W terminach norm na przestrzeniach H^s i H^t ostatnia nierówność oznacza

$$\|u\|_{2,s} \leq \|u\|_{2,t}.$$



PRZYKŁAD

Rozważmy $u \in H^s$ oraz $v \in H^{-s}$. Mamy $J_{-s}u, J_s v \in L_2(\mathbb{R}^d)$, tj.

$$\mathcal{F}^{-1} M_{\sigma_{-s}} \mathcal{F} u, \mathcal{F}^{-1} M_{\sigma_s} \mathcal{F} v \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że odwzorowanie $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ zachowuje podprzestrzeń $L_2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, a więc $\sigma_{-s}\hat{u}, \sigma_s\hat{v} \in L_2(\mathbb{R}^d)$. W szczególności $\hat{u}\hat{v} = \sigma_{-s}\hat{u}\sigma_s\hat{v} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, a stąd całka

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x)\hat{v}(x) dx$$

jest dobrze zdefiniowana. Ponadto funkcjonal $u \mapsto \int \hat{u}\hat{v}$ jest złożeniem

$$H^s \ni u \longmapsto J_{-s}u \xrightarrow{\mathcal{F}} \sigma_{-s}\hat{u} \longmapsto \int \sigma_{-s}\hat{u}\sigma_s\hat{v} = \int \hat{u}\hat{v} \in \mathbb{C}.$$

PRZYKŁAD

Pierwsze odwzorowanie (tj. J_{-s}) jest izometrią H^s na $L_2(\mathbb{R}^d)$, drugie jest unitarne na $L_2(\mathbb{R}^d)$, a trzecie jest ciągłym funkcjonałem na $L_2(\mathbb{R}^d)$, gdyż $\sigma_s \hat{v} \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Innymi słowy każda dystrybucja $v \in H^{-s}$ wyznacza ciągły funkcjonał na H^s .

Dalej z definicji H^s (oraz H^{-s}) wynika, że gdy para (u, v) przebiega $H^s \times H^{-s}$, funkcja $\hat{u}\hat{v}$ przebiega zbiór wszystkich iloczynów $\psi\varphi$ przy $\psi, \varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Stąd każdy ciągły funkcjonał liniowy na H^s jest dany przez

$$u \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x) \hat{v}(x) \, dx$$

dla jedynej $v \in H^{-s}$. Innymi słowy przestrzeń sprzężona do H^s może być w naturalny sposób utożsamiona z H^{-s} .

TWIERDZENIE

Niech $(\Omega, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech μ i ν będą dwoma skończonymi miarami na Ω . Wówczas istnieją

- nieujemna funkcja mierzalna f na Ω ,
- zbiór $N \in \mathfrak{M}$ spełniający $\mu(N) = 0$

takie, że

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu + \nu(A \cap N), \quad A \in \mathfrak{M}.$$

DOWÓD

Niech $\rho = \mu + \nu$. Wówczas ρ jest skończoną miarą na Ω . Rozważmy przestrzeń Hilberta $L_2(\Omega, \rho)$ oraz odwzorowanie liniowe

$$\Lambda: L_2(\Omega, \rho) \ni \psi \longmapsto \int_{\Omega} \psi \, d\nu \in \mathbb{C}$$

(jest ono dobrze zdefiniowane, gdyż $\psi \in L_2(\Omega, \rho)$ implikuje $\psi \in L_1(\Omega, \rho)$ i oczywiście $L_1(\Omega, \rho) \subset L_1(\Omega, \nu)$ jako, że $\nu \leq \rho$). Funkcjonał Λ jest ograniczony, bo dla dowolnego $\psi \in L_2(\Omega, \rho)$ na mocy nierówności Höldera na (Ω, ν) mamy

$$\begin{aligned} |\Lambda(\psi)| &= \left| \int_{\Omega} \psi \, d\nu \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\psi|^2 \, d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \mathbf{1}^2 \, d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |\psi|^2 \, d\nu \right)^{\frac{1}{2}} \nu(\Omega)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\Omega} |\psi|^2 \, d\nu + \int_{\Omega} |\psi|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \nu(\Omega)^{\frac{1}{2}} = \|\psi\|_2 \nu(\Omega)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

DOWÓD

Z twierdzenia Riesz'a o reprezentacji wiemy, że istnieje $\varphi \in L_2(\Omega, \rho)$ taki, że

$$\Lambda(\psi) = \langle \varphi | \psi \rangle, \quad \psi \in L_2(\Omega, \rho).$$

Sprawdzimy teraz, że $\varphi \geq 0$. Istotnie, dla dowolnej nieujemnej funkcji $\psi \in L_2(\Omega, \rho)$ mamy

$$\langle \operatorname{Re} \varphi | \psi \rangle - i \langle \operatorname{Im} \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle = \Lambda(\psi) = \int_{\Omega} \psi \, d\nu \geq 0,$$

a więc funkcja $\operatorname{Im} \varphi$ jest ortogonalna do wszystkich nieujemnych funkcji z $L_2(\Omega, \rho)$, a w konsekwencji do całej przestrzeni $L_2(\Omega, \rho)$. Wynika stąd, że φ jest rzeczywista ρ -prawie wszędzie (a stąd także μ -prawie wszędzie i ν -prawie wszędzie).

DOWÓD

Niech $X = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) < 0\}$. Wtedy

$$0 \leq \nu(X) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_X d\nu = \Lambda(\mathbf{1}_X) = \langle \varphi | \mathbf{1}_X \rangle = \int_X \varphi d\rho \leq 0,$$

a stąd wynika, że $\rho(X) = 0$ i w szczególności $\mu(X) = \nu(X) = 0$.

Następnie zauważmy, że dla każdego $\psi \in L_2(\Omega, \rho)$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1 - \varphi)\psi d\nu &= \int_{\Omega} \psi d\nu - \int_{\Omega} \varphi\psi d\nu = \Lambda(\psi) - \int_{\Omega} \varphi\psi d\nu = \int_{\Omega} \bar{\varphi}\psi d\rho - \int_{\Omega} \varphi\psi d\nu \\ &= \int_{\Omega} \varphi\psi d\rho - \int_{\Omega} \varphi\psi d\nu = \int_{\Omega} \varphi\psi d\mu + \int_{\Omega} \varphi\psi d\nu - \int_{\Omega} \varphi\psi d\nu = \int_{\Omega} \varphi\psi d\mu. \end{aligned} \quad (*)$$

DOWÓD

Położmy $N = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \geq 1\}$. Mamy

$$\nu(N) = \Lambda(\mathbf{1}_N) = \langle \varphi | \mathbf{1}_N \rangle = \int_{\Omega} \varphi \mathbf{1}_N d\rho = \int_N \varphi d\rho \geq \rho(N) = \mu(N) + \nu(N),$$

a więc $\mu(N) = 0$.

Teraz niech $Y_n = \{x \in \Omega \mid 0 \leq \varphi(x) \leq 1 - \frac{1}{n}\}$ i $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Wtedy dopełnienie $N \cup Y$ (które z dokładnością do zbioru miary ρ zero jest równe X) ma miarę ρ równą zero, a więc także jest miary zero względem μ i ν . Stąd dla każdego $A \in \mathfrak{M}$

$$\nu(A) = \nu(A \cap Y) + \nu(A \cap N). \quad (**)$$

DOWÓD

Niech $\psi_n = \mathbf{1}_{A \cap Y_n}$. Wtedy

$$\nu(A \cap Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_n \, d\nu.$$

na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej. Dalej, skoro $\varphi < 1$ na Y możemy napisać

$$\int_{\Omega} \psi_n \, d\nu = \int_{\Omega} \frac{\psi_n}{1-\varphi} (1-\varphi) \, d\nu \stackrel{(*)}{=} \int_{\Omega} \psi_n \frac{\varphi}{1-\varphi} \, d\mu.$$

Kładąc $f = \mathbf{1}_Y \frac{\varphi}{1-\varphi}$ otrzymujemy mierzalną i nieujemną funkcję na Ω taką, że

$$\int_A f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_n \frac{\varphi}{1-\varphi} \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_n \, d\nu = \nu(A \cap Y).$$

Z $(\star\star)$ oraz powyższego równania wynika, że dla każdego A zachodzi $\nu(A) = \int_A f \, d\mu + \nu(A \cap N)$. □

- Niech μ i ν będą miarami na tej samej przestrzeni mierzalnej Ω .
- Powiemy, że ν jest **absolutnie ciągła** względem μ , jeśli dla każdego mierzalnego $A \subset \Omega$ warunek $\mu(A) = 0$ pociąga $\nu(A) = 0$.

TWIERDZENIE RADONA-NIKODYMA

Niech $(\Omega, \mathfrak{M})$ będzie przestrzenią mierzalną i niech μ i ν będą σ -skończonymi miarami na Ω . Załóżmy, że ν jest absolutnie ciągła względem μ . Wtedy istnieje nieujemna funkcja mierzalna f na Ω taka, że

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

DOWÓD

Jeśli μ i ν są skończone, to teza wynika natychmiast z poprzedniego twierdzenia. Jeśli nie są skończone, to dzielimy Ω na rozłączne zbiory $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ spełniające $\mu(\Omega_n), \nu(\Omega_n) < +\infty$. Każdy Ω_n jest przestrzenią mierzalną i obcięcia μ_n i ν_n miar μ i ν do Ω_n spełniają

$$\nu(A \cap \Omega_n) = \int_{A \cap \Omega_n} f_n \, d\mu, \quad A \in \mathfrak{M}$$

dla pewnej nieujemnej funkcji mierzalnej f_n na Ω_n . Stąd, jeśli $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{1}_{\Omega_n}$, to dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap \Omega_n} f_n \, d\mu = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n \mathbf{1}_{\Omega_n} \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

