

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 1

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Niech X będzie przestrzenią zwartą.
- Wówczas zbiór $C(X)$ wszystkich ciągłych funkcji $X \rightarrow \mathbb{C}$ jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C(X).$$

- Teraz niech X będzie przestrzenią **lokalnie zwartą**, tj. taką, że każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie U o zwartym domknięciu.
- Wówczas dla $f \in C(X)$ może być $\|f\|_{\infty} = +\infty$, ale norma ma skończone wartości na zbiorze $C_b(X)$ funkcji ciągłych i ograniczonych na X .
- $C_b(X)$ jest przestrzenią Banacha z normą $\|\cdot\|_{\infty}$.
- Niech $C_0(X)$ oznacza zbiór $f \in C(X)$ takich, że dla dowolnej liczby $\nu > 0$ zbiór

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \nu\}$$

jest zwarty. Jest jasne, że $C_0(X)$ jest podzbiorem $C_b(X)$ i nietrudno się przekonać, że jest to podprzestrzeń wektorowa.

STWIERDZENIE

$C_0(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią $C_b(X)$.

DOWÓD

Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów $C_0(X)$ zbieżnym jednostajnie do f . Wówczas oczywiście f jest ciągła, a ponadto warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

pociąga za sobą fakt, że dla dowolnej liczby $\nu > 0$ oraz x takiego, że $|f(x)| \geq \nu$ mamy

$$|f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq |f(x)| - |f(x) - f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq \nu - |f(x) - f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq \nu - \frac{\nu}{2} = \frac{\nu}{2},$$

a więc $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \nu\} \subset \{x \in X \mid |f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq \frac{\nu}{2}\}$. Wynika stąd, że dla dowolnej liczby $\nu > 0$ zbiór $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \nu\}$ jest zwarty. $\square$

- Przestrzeń $C_0(X)$ nazywany **przestrzenią funkcji ciągłych znikających w nieskończoności** na X .
- Czasami na oznaczenie $C_0(X)$ stosowana jest również notacja $C_\infty(X)$.
- W przypadku gdy przestrzeń X jest dyskretna, piszemy $c_b(X)$ i $c_0(X)$ zamiast $C_b(X)$ i $C_0(X)$, a w przypadku $X = \mathbb{N}$ po prostu c_b (lub c) i c_0 .
- Jeśli X ma skończenie wiele punktów, to $C(X) = C_b(X) = C_0(X)$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{C}^{|X|}$ z normą

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{|X|} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max_i |\lambda_i|.$$

- Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i ustalmy $p \in [1, +\infty[$.
- Dla mierzalnej funkcji $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiujemy

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

i kładziemy $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu) = \{f \mid \|f\|_p < +\infty\}$ oraz $\mathcal{N} = \{f \mid \|f\|_p = 0\}$.

- Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej mierzalnej funkcji f i $\lambda \in \mathbb{C}$ mamy $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$.

LEMAT

Mamy $\mathcal{N} = \{f \mid f \doteq 0\}$.

DOWÓD

Jeśli $\int_{\Omega} |f|^p d\mu = 0$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór

$$A_n = \left\{x \in \Omega \mid |f(x)|^p > \frac{1}{n}\right\}$$

jest miary zero (w przeciwnym razie $\int_{\Omega} |f|^p d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$ dla pewnego n). Stąd

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

i w konsekwencji $|f|^p = 0$ poza zbiorem miary zero. To oczywiście oznacza, że $f \doteq 0$. □

TWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ MINKOWSKIEGO)

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech f i g będą funkcjami mierzalnymi $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Wówczas

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (*)$$

DOWÓD

Jeśli $\|f\|_p = +\infty$ lub $\|g\|_p = +\infty$, to nierówność $(\star)$ jest spełniona. Z drugiej strony, jeśli $\|f\|_p = 0$ to $f \doteq 0$, a więc $f + g \doteq g$ i mamy

$$\|f + g\|_p = \|g\|_p = \|0\| + \|g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p,$$

czyli $(\star)$ zachodzi również w tym przypadku. Podobnie jest gdy $\|g\|_p = 0$.

Udowodnimy teraz $(\star)$ w przypadku $0 < \|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$. Wykorzystamy w tym celu wypukłość funkcji $t \mapsto t^p$ na $[0, +\infty[$.

DOWÓD

Obliczamy

$$\begin{aligned}\frac{\|f + g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} &= \left\| \frac{f}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \frac{g}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right\| \\ &= \left\| \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{f}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{g}{\|g\|_p} \right\| = \left\| \alpha \frac{f}{\|f\|_p} + \beta \frac{g}{\|g\|_p} \right\|,\end{aligned}$$

gdzie $\alpha = \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$, a $\beta = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$. Mamy $\alpha, \beta \geq 0$ oraz $\alpha + \beta = 1$.

DOWÓD

$$\begin{aligned}\frac{\|f + g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} &= \left\| \alpha \frac{f}{\|f\|_p} + \beta \frac{g}{\|g\|_p} \right\| = \left(\int_{\Omega} \left| \alpha \frac{f}{\|f\|_p} + \beta \frac{g}{\|g\|_p} \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} \left(\alpha \frac{|f|}{\|f\|_p} + \beta \frac{|g|}{\|g\|_p} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left(\alpha \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \beta \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p} \right) d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\alpha}{\|f\|_p^p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{\beta}{\|g\|_p^p} \int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{\beta}{\|g\|_p^p} \|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = (\alpha + \beta)^{\frac{1}{p}} = 1,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

WNIOSKI

- ❶ $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ jest przestrzenią wektorową,
- ❷ $\mathcal{N}$ jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$.

DEFINICJA

Przestrzeń $L_p(\Omega, \mu)$ jest to przestrzeń ilorazowa $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)/\mathcal{N}$.

- Elementami $L_p(\Omega, \mu)$ są **klasy funkcji** względem relacji równości prawie wszędzie.
- Mimo to, dla $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ zamiast $f + \mathcal{N} \in L_p(\Omega, \mu)$ piszemy zwykle $f \in L_p(\Omega, \mu)$. Może to prowadzić do nieścisłości, ale zazwyczaj dbamy, aby uznając funkcję f za element przestrzeni $L_p(\Omega)$ nie wykonywać na niej żadnych operacji, które zależałyby od f a nie od klasy f względem relacji równości prawie wszędzie.
- Funkcja $L_p(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \|f\|_p \in [0, +\infty[$ jest normą.

TWIERDZENIE

Przestrzeń $L_p(\Omega, \mu)$ z normą $\|\cdot\|_p$ jest przestrzenią Banacha.

DOWÓD

Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $L_p(\Omega, \mu)$ i wybierzmy z niego podciąg $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dalej niech $g_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ oraz $g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$.

Z nierówności Minkowskiego wynika, że $\|g_k\|_p \leq 1$ dla wszystkich k , a ponadto

$$\|g\|_p^p = \int_{\Omega} |g|^p d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_k|^p d\mu \leq 1$$

na mocy lematu Fatou.

DOWÓD

W szczególności $|g(x)| < +\infty$ dla prawie wszystkich $x \in \Omega$, a w konsekwencji dla prawie wszystkich x szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

Jest zbieżny. Zbieżny jest zatem także szereg

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)),$$

co oznacza, że ciąg $(f_{n_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny dla prawie wszystkich x . Innymi słowy ciąg $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo prawie wszędzie na Ω .

Oznaczmy (prawie wszędzie zdefiniowaną) granicę ciągu $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ symbolem f i rozszerzmy f do funkcji mierzalnej na całym zbiorze Ω . Pokażemy, że f definiuje element $L_p(\Omega, \mu)$ oraz że $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ w $L_p(\Omega, \mu)$.

DOWÓD

Skoro

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon,$$

korzystając ponownie z lematu Fatou, możemy oszacować $\|f_n - f\|_p$:

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f_{n_k}|^p d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n_k}\|_p^p \leq \varepsilon^p,$$

jeśli tylko $n \geq N_\varepsilon$. W szczególności $f - f_n \in L_p(\Omega, \mu)$, a więc $f = f_n + (f - f_n) \in L_p(\Omega, \mu)$.Wreszcie skoro $f \in L_p(\Omega, \mu)$, oszacowanie

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon$$

pokazuje, że $f_n - f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ w $L_p(\Omega, \mu)$. □

UWAGA

Warto zapamiętać wykazany przez nas w powyższym dowodzie fakt, że dla $p \in [1, +\infty[$ każdy ciąg zbieżny w $L_p(\Omega, \mu)$ ma podciąg zbieżny punktowo prawie wszędzie.

- Dla mierzalnej $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definiujemy

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| = \inf_{\substack{\Delta \subset \Omega \\ \mu(\Omega \setminus \Delta) = 0}} \sup_{x \in \Delta} |f(x)|.$$

- Zauważmy, że $\{f \mid \|f\|_\infty = 0\} = \{f \mid f \doteq 0\} = \mathcal{N}$.
- Ponadto $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ dla dowolnych f i g i $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ dla wszystkich f oraz $\lambda \in \mathbb{C}$
- Kładziemy $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu) = \{f \mid \|f\|_\infty < +\infty\}$ i definiujemy

$$L_\infty(\Omega, \mu) = \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu) / \mathcal{N}.$$

FAKT

$L_\infty(\Omega, \mu)$ z normą $\|\cdot\|_\infty$ jest przestrzenią Banacha.

- Niech I będzie dowolnym zbiorem.
- Rozważając na I miarę liczącą μ , możemy utworzyć przestrzeń $L_p(I, \mu)$ ($p \in [1, +\infty]$). W tej sytuacji przestrzeń tę oznaczamy symbolem $\ell_p(I)$.
- Gdy I jest zbiorem d elementowym, przestrzeń $\ell_p(I)$ jest izomorficzna z $\mathbb{C}^d$ z normą

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \right\| = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^d |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1, +\infty[\\ \max_i |\lambda_i| & p = +\infty \end{cases}.$$

TWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ HÖLDERA)

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech f i g będą mierzalnymi funkcjami $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Niech $p, q \in [1, +\infty]$ będą takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(Dowód – na ćwiczeniach.)