

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 2

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ HÖLDERA)

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech f i g będą mierzalnymi funkcjami $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Niech $p, q \in [1, +\infty]$ będą takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

WNIOSEK

Niech (Ω, μ) będzie taką przestrzenią z miarą, że $\mu(\Omega) < +\infty$. Wówczas jeśli $p, q \in [1, +\infty]$ spełniają $p > q$, to $L_p(\Omega, \mu) \subset L_q(\Omega, \mu)$.

DOWÓD.

Musimy wykazać, że jeśli $\|f\|_p < +\infty$, to także $\|f\|_q < +\infty$. Niech $\mathbf{1}_\Omega$ oznacza funkcję stałą równą 1 na Ω . Zauważmy, że $\mathbf{1}_\Omega \in L_r(\Omega, \mu)$ dla wszystkich r . Niech $p' = \frac{p}{p-q}$ i $q' = \frac{p}{q}$. Liczby p' i q' spełniają $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$, a więc na mocy nierówności Höldera mamy

$$\|f\|_q^q = \| |f|^q \|_1 = \| \mathbf{1}_\Omega |f|^q \|_1 \leq \| \mathbf{1}_\Omega \|_{p'} \| |f|^q \|_{q'} = \| \mathbf{1}_\Omega \|_{\frac{p}{p-q}} \| |f|^q \|_{\frac{p}{q}} = \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_p^q < +\infty. \quad \square$$

STWIERDZENIE

Niech X i Y będą przestrzeniami z normą i niech $T: X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶ odwzorowanie T jest ciągłe,
- ❷ odwzorowanie T jest ciągłe w 0,
- ❸ mamy $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$.

DEFINICJA

Odwzorowanie liniowe $T: X \rightarrow Y$ spełniające powyższe warunki nazywamy **ograniczonym**. Zbiór wszystkich ograniczonych operatorów $X \rightarrow Y$ oznaczamy symbolem $B(X, Y)$, a w przypadku $Y = X$ piszemy $B(X)$.

- Funkcja

$$\|\cdot\|: B(X, Y) \ni T \longmapsto \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \in [0, +\infty[$$

jest normą.

- Ponadto jeśli Y jest zupełna, to przestrzeń $B(X, Y)$ z normą $\|\cdot\|$ jest przestrzenią Banacha.
- Gdy $Y = \mathbb{C}$, przestrzeń $B(X, Y)$ oznaczamy symbolem X^* i nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do X .
- Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że odwzorowanie $\kappa: X \rightarrow X^{**}$ zadane wzorem

$$\kappa(x)(\phi) = \phi(x), \quad x \in X, \phi \in X^*$$

jest izometrią. Obraz κ może być właściwą podprzestrzenią X^{**} .

PRZYKŁAD

Niech $p \in [1, +\infty[$ i niech $q \in]1, +\infty]$ będzie takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wówczas

- ❶ dla każdego $b \in \ell_q$ ciąg ab jest sumowalny i odwzorowanie

$$\varphi_b: \ell_p \ni a \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n \in \mathbb{C}$$

należy do ℓ_p^* ,

- ❷ każdy element ℓ_p^* jest postaci φ_b dla jedyne go $b \in \ell_q$,
❸ odwzorowanie $\ell_q \ni b \mapsto \varphi_b \in \ell_p^*$ jest izometrią.

TWIERDZENIE

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią z normą.

- ❶ Niech Y będzie przestrzenią z normą i niech $T: X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas T jest ciągłe.
- ❷ Niech $\|\cdot\|'$ będzie inną normą na X . Wówczas istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że
$$c_1\|x\| \leq \|x\|' \leq c_2\|x\|, \quad x \in X.$$
- ❸ Każdy domknięty i ograniczony podzbiór X jest zwarty.
- ❹ X jest przestrzenią Banacha.

WNIOSEK

Niech X będzie przestrzenią z normą, a Y jej skończenie wymiarową podprzestrzenią. Wtedy Y jest skończenie wymiarową przestrzenią z normą, a więc jest zupełna i w konsekwencji domknięta w X . Innymi słowy każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni z normą jest domknięta.

STWIERDZENIE

Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią z normą nad ciałem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i niech $\{e_1, \dots, e_d\}$ będzie bazą X . Wówczas izomorfizm

$$\Lambda: \mathbb{K}^d \ni \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \in X$$

jest homeomorfizmem, przy czym na $\mathbb{K}^d$ rozważamy metrykę pochodzącą od normy

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \right\| = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_d|\}.$$

DOWÓD

Odwzorowanie Λ jest ciągłe, jako że

$$\begin{aligned} \left\| \Lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^d (\lambda_i - \mu_i) \mathbf{e}_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^d |\lambda_i - \mu_i| \|\mathbf{e}_i\| \leq \max\{|\lambda_1 - \mu_1|, \dots, |\lambda_d - \mu_d|\} \sum_{i=1}^d \|\mathbf{e}_i\|, \end{aligned}$$

czyli $\|\Lambda\| \leq \sum_{i=1}^d \|\mathbf{e}_i\|$.

DOWÓD

Przypuśćmy teraz, że Λ^{-1} nie jest ciągłe. Wtedy Λ^{-1} jest nieciągłe w punkcie $0 \in X$, a więc istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów X taki, że $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ale ciąg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów $\mathbb{K}^d$ zdefiniowany jako

$$u_n = \Lambda^{-1} x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

nie jest zbieżny do zera. Innymi słowy istnieje stała $\delta > 0$ taka, że $\|u_n\| \geq \delta$ dla nieskończenie wielu n . Przechodząc do podciągu możemy przyjąć, że

$$\|u_n\| \geq \delta, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\clubsuit)$$

DOWÓD

Położmy $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Wektory $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są elementami $(d-1)$ -wymiarowej sfery o środku w zerze i promieniu 1 w $\mathbb{K}$, która jest zbiorem zwartym (jest domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{K}^d$). Stąd istnieje podciąg $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $v_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} v$ dla pewnego v ze sfery jednostkowej ($\|v\| = 1$).

Mamy

$$\Lambda v_n = \frac{1}{\|u_n\|} \Lambda u_n = \frac{1}{\|u_n\|} x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

bo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do zera a ciąg współczynników $\left(\frac{1}{\|u_n\|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony (por. ♣).

Przechodząc do podciągu dostajemy

$$0 \neq v \xleftarrow[\infty \leftarrow k]{} v_{n_k} \xrightarrow{\Lambda} \frac{1}{\|u_{n_k}\|} x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

jako że Λ jest ciągłe. Ale to stoi w sprzeczności z injektywnością Λ i w efekcie pokazuje, że Λ^{-1} musi być ciągłe. □

DOWÓD TWIERDZENIA

Ad ❶. Niech $\{e_1, \dots, e_d\}$ będzie bazą X i niech $\Lambda: \mathbb{K}^d \rightarrow X$ będzie homeomorfizmem opisany w poprzednim stwierdzeniu. Dalej niech

$$\Gamma: \mathbb{K}^d \ni \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^d \lambda T e_i \in X.$$

Tak samo jak w przypadku Λ pokazujemy, że odwzorowanie Γ jest ciągłe. Jest też jasne, że $T = \Gamma \circ \Lambda^{-1}$, a więc T jest ciągłe.

Ad ❷. Rozważmy odwzorowanie identycznościowe $\mathbb{1}_X: X \rightarrow X$ jako odwzorowanie z $(X, \|\cdot\|)$ do $(X, \|\cdot\|')$. Na mocy punktu ❶ odwzorowanie to jest ciągłe, a więc jest ograniczone. Kładąc $c_2 = \|\mathbb{1}_X\|$ otrzymujemy

$$\|x\|' = \|\mathbb{1}_X x\|' \leq \|\mathbb{1}_X\| \|x\| = c_2 \|x\|, \quad x \in X.$$

Podobnie pokazujemy istnienie stałej $c_1 > 0$ takiej, że $\|x\| \leq \frac{1}{c_1} \|x\|'$ ($x \in X$), co daje nam $c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|$ dla wszystkich x .

DOWÓD TWIERDZENIA

Ad ③. Niech $K \subset X$ będzie domknięty i ograniczony. Odwzorowanie $\Lambda^{-1}: X \rightarrow \mathbb{K}^d$ z poprzedniego stwierdzenia jest ciągłe, a więc ograniczone. Wynika stąd, że $\Lambda^{-1}(K)$ jest ograniczonym podzbiorem X :

$$\sup\{\|\Lambda^{-1}k\| \mid k \in K\} \leq \|\Lambda^{-1}\| \sup\{\|k\| \mid k \in K\}.$$

Oczywiście $\Lambda^{-1}(K)$ jest także zbiorem domkniętym, jako że odwzorowanie Λ jest ciągłe.

Oznacza to, że zbiór $\Lambda^{-1}(K)$ jest zwarty, a stąd oczywiście $K = \Lambda(\Lambda^{-1}(K))$ jest zwarty.

Ad ④. Niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w X i niech $K = \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$. Wówczas zbiór K jest domknięty i ograniczony, a więc na mocy punktu ③ jest zwarty. Wynika stąd, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Ale ciąg Cauchy'ego, którego podciąg jest zbieżny, musi być zbieżny (do tej samej granicy). Oznacza to, że przestrzeń X jest zupełna. $\square$

DEFINICJA

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. **Formą półtoraliniową na V** nazywamy odwzorowanie $F: V \times V$ takie, że

- ❶ dla każdego $v \in V$ odwzorowanie $V \ni w \mapsto F(v, w) \in \mathbb{C}$ jest liniowe,
- ❷ dla każdego $w \in V$ odwzorowanie $V \ni v \mapsto F(v, w) \in \mathbb{C}$ jest antyliniowe.

Forma półtoraliniowa F na V jest

- ❶ **hermitowska**, jeśli $F(w, v) = \overline{F(v, w)}$ dla wszystkich $v, w \in V$,
- ❷ **dodatnia**, jeśli $F(v, v) \geq 0$ dla wszystkich $v \in V$,
- ❸ **ściśle dodatnia**, jeśli $F(v, v) > 0$ dla wszystkich $v \in V \setminus \{0\}$.

Iloczynem skalarnym na V nazywamy ściśle dodatnią formę półtoraliniową na V . Zazwyczaj oznaczamy ją symbolem $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

STWIERDZENIE (TOŻSAMOŚĆ POLARYZACYJNA)

Niech F będzie formą półtoraliniową na V . Wówczas

$$F(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k F(w + i^k v, w + i^k v), \quad v, w \in V.$$

DOWÓD

Mamy

$$\begin{aligned} F(w + v, w + v) &= F(w, w) + F(w, v) + F(v, w) + F(v, v), \\ iF(w + iv, w + iv) &= iF(w, w) - F(w, v) + F(v, w) + iF(v, v), \\ -F(w - v, w - v) &= -F(w, w) + F(w, v) + F(v, w) - F(v, v), \\ -iF(w - iv, w - iv) &= -iF(w, w) - F(w, v) + F(v, w) - iF(v, v). \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe równości otrzymujemy $\sum_{k=0}^3 i^k F(w + i^k v, w + i^k v) = 4F(v, w)$. $\square$

PRZYKŁADY INNYCH FORM TOŻSAMOŚCI POLARYZACYJNEJ

$$\textcircled{1} \quad F(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} F(v + i^k w, v + i^k w),$$

$$\textcircled{2} \quad F(v, w) = \int_{\mathbb{T}} z F(w + zv, w + zv) d\mu(z), \text{ gdzie } \mu \text{ jest borelowską miarą}$$

probabilistyczną na $\mathbb{T}$ taką, że $\int_{\mathbb{T}} z d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z^2 d\mu(z) = 0$.

UWAGA

Funkcja $z \mapsto F(w + zv, w + zv)$ jest ciągła, a więc całka w punkcie $\textcircled{2}$ ma sens.

STWIERDZENIE

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i niech F będzie formą półtoraliniową na V . Wtedy

- ❶ jeśli F jest ściśle dodatnia, to F jest dodatnia,
- ❷ jeśli F jest dodatnia, to F jest hermitowska.

DOWÓD PUNKTU ❷

Na mocy tożsamości polaryzacyjnej dla dowolnych $v, w \in V$ mamy

$$\begin{aligned} \overline{F(v, w)} &= \overline{\frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k F(w + i^k v, w + i^k v)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \overline{F(w + i^k v, w + i^k v)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} F(w + i^k v, w + i^k v) = F(w, v). \quad \square \end{aligned}$$

STWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA)

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i niech F będzie dodatnią formą półtoraliniową na V . Wtedy

$$|F(v, w)| \leq F(v, v)^{\frac{1}{2}} F(w, w)^{\frac{1}{2}}.$$

DOWÓD

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \ni t \mapsto F(v + tw, v + tw)$. Funkcja ta przyjmuje wyłącznie nieujemne wartości, a ponadto

$$f(t) = F(w, w)t^2 + 2 \operatorname{Re} F(v, w)t + F(v, v),$$

a więc $\Delta = 4(\operatorname{Re} F(v, w))^2 - 4F(w, w)F(v, v) \leq 0$, czyli

$$(\operatorname{Re} F(v, w))^2 \leq F(w, w)F(v, v).$$

Nierówność ta zachodzi dla wszystkich v i w , a więc także dla par postaci $(e^{i\theta}v, w)$, gdzie θ jest tak dobrana, że $e^{-i\theta}F(v, w) \geq 0$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} |F(v, w)|^2 &= (e^{-i\theta}F(v, w))^2 = (\operatorname{Re} F(e^{i\theta}v, w))^2 \\ &\leq F(w, w)F(e^{i\theta}v, e^{i\theta}v) = F(w, w)F(v, v). \end{aligned}$$



WNIOSKI

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Wówczas

- ❶ funkcja $V \ni v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle} \in [0, +\infty[$ jest normą,
- ❷ jeśli $v, w \in V$ spełniają $|\langle v|w \rangle| = \|v\|\|w\|$, to są proporcjonalne,
- ❸ iloczyn skalarny jest ciągły względem metryki wyznaczonej przez normę i jednostajnie ciągły na zbiorach ograniczonych,
- ❹ dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w|v \rangle|$,
- ❺ jeśli v_1 i v_2 spełniają $\langle w|v_1 \rangle = \langle w|v_2 \rangle$ dla wszystkich $w \in V$, to $v_1 = v_2$.