

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 3

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

WNIOSKI

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Wówczas

- ❶ funkcja $V \ni v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle} \in [0, +\infty[$ jest normą,
- ❷ jeśli $v, w \in V$ spełniają $|\langle v|w \rangle| = \|v\|\|w\|$, to są proporcjonalne,
- ❸ iloczyn skalarny jest ciągły względem metryki wyznaczonej przez normę i jednostajnie ciągły na zbiorach ograniczonych,
- ❹ dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w|v \rangle|$,
- ❺ jeśli v_1 i v_2 spełniają $\langle w|v_1 \rangle = \langle w|v_2 \rangle$ dla wszystkich $w \in V$, to $v_1 = v_2$.

DOWÓD

Ad ❶. Jest jasne, że $\|\alpha v\|^2 = \langle \alpha v | \alpha v \rangle = |\alpha|^2 \langle v | v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2$ dla wszystkich $v \in V$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Dalej, na mocy nierówności Schwarz'a

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v | w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2 |\langle v | w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned}$$

Ad ❷. Niech $|\langle v | w \rangle| = \|v\| \|w\|$. Tak jak w dowodzie nierówności Schwarz'a, możemy wybrać θ tak, aby $\langle e^{i\theta} v | w \rangle = |\langle v | w \rangle|$. Wtedy wyróżnik wielomianu

$$\langle e^{i\theta} v + tw | e^{i\theta} v + tw \rangle = \langle w | w \rangle t^2 + 2 |\langle v | w \rangle| t + \langle v | v \rangle = \|w\|^2 t^2 + 2 |\langle v | w \rangle| t + \|v\|^2$$

jest równy zero.

DOWÓD

Tak więc istnieje $t_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $\langle e^{i\theta}v + t_0w | e^{i\theta}v + t_0w \rangle = 0$, czyli $e^{i\theta}v + t_0w = 0$, a więc v i w są proporcjonalne.

Ad ③. Jeśli $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ i $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$, to

$$\begin{aligned} |\langle v_n | w_n \rangle - \langle v | w \rangle| &\leq |\langle v_n | w_n \rangle - \langle v_n | w \rangle| + |\langle v_n | w \rangle - \langle v | w \rangle| \\ &\leq |\langle v_n | w_n - w \rangle| + |\langle v_n - v | w \rangle| \\ &\leq \|v_n\| \|w_n - w\| + \|v_n - v\| \|w\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

ponieważ ciąg $(\|v_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony. Powyższy wzór pokazuje również, że iloczyn skalarny jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach $V \times V$.

DOWÓD

Ad ④. Wzór $\|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w|v \rangle|$ jest oczywisty dla $v = 0$. Jeśli $v \neq 0$, to z nierówności Schwarza wnioskujemy, że

$$\sup_{\|w\|=1} |\langle w|v \rangle| \leq \sup_{\|w\|=1} \|w\| \|v\| = \|v\|,$$

a z drugiej strony, biorąc $w = \frac{v}{\|v\|}$ otrzymujemy

$$|\langle w|v \rangle| = \frac{1}{\|v\|} \langle v|v \rangle = \frac{1}{\|v\|} \|v\|^2 = \|v\|.$$

Ad ⑤. Rozważmy $v = v_1 - v_2$. Wówczas dla dowolnego $w \in V$ mamy $\langle w|v \rangle = \langle w|v_1 \rangle - \langle w|v_2 \rangle = 0$, a więc $\|v\| = 0$ na mocy punktu ④. $\square$

STWIERDZENIE (REGUŁA RÓWNOLEGŁOKU)

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Wówczas dla dowolnych $v, w \in V$ mamy $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

DOWÓD

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle + \langle v - w | v - w \rangle \\ &= (\langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle) + (\langle v | v \rangle - \langle v | w \rangle - \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle) \\ &= 2\langle v | v \rangle + 2\langle w | w \rangle.\end{aligned}$$

□

UWAGA

Niech V będzie przestrzenią z normą, w której

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

zachodzi dla wszystkich v i w . Wówczas istnieje iloczyn skalarny na V taki, że $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ dla wszystkich $v \in V$.

- Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym.
- Dalej niech $(v_n)_{n \in I}$ będzie układem liniowo niezależnym (przy czym $I = \{1, \dots, N\}$ lub $I = \mathbb{N}$).
- Indukcyjnie definiujemy ciągi $(y_n)_{n \in I}$ i $(e_n)_{n \in I}$ w następujący sposób:
 - $y_1 = v_1$ i $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$,
 - $y_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | v_k \rangle e_i$ i $e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ dla $k \geq 1$.
- Otrzymane układy $(y_n)_{n \in I}$ i $(e_n)_{n \in I}$ spełniają
 - układ $(y_n)_{n \in I}$ jest liniowo niezależny,
 - układ $(e_n)_{n \in I}$ jest ortonormalny,
 - $\text{span}\{v_n \mid n \in I\} = \text{span}\{y_n \mid n \in I\} = \text{span}\{e_n \mid n \in I\}$.
- Operację przejścia od układu $(v_n)_{n \in I}$ do $(y_n)_{n \in I}$ nazywamy **ortogonalizacją**, a od $(v_n)_{n \in I}$ do $(e_n)_{n \in I}$ – **ortonormalizacją Grama-Schmidta**.

DEFINICJA

Przestrzenią Hilberta nazywamy przestrzeń z iloczynem skalarnym, która jest zupełna względem metryki wyznaczonej przez normę zdefiniowaną przez iloczyn skalarny.

PRZYKŁAD

Każda skończona wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta.

PRZYKŁAD

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym i niech $\mathcal{H}$ będzie uzupełnieniem przestrzeni metrycznej (V, d) , gdzie $d(v, w) = \|v - w\|$ (norma zdefiniowana przez iloczyn skalarny). Operacje algebraiczne, norma i iloczyn skalarny rozszerzają się jednoznacznie na całą przestrzeń $\mathcal{H}$, która wraz z tymi operacjami jest przestrzenią Hilberta.

PRZYKŁAD

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą. Dzięki nierówności Höldera wiemy, że dla dowolnych $\varphi, \psi \in L_2(\Omega, \mu)$ całka

$$\int_{\Omega} \overline{\varphi} \psi \, d\mu$$

jest dobrze zdefiniowana i nietrudno się przekonać, że $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\Omega} \overline{\varphi} \psi \, d\mu$

jest iloczynem skalarnym na $L_2(\Omega, \mu)$. Co więcej, mamy $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle}$ dla wszystkich $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$. W szczególności $L_2(\Omega, \mu)$ jest przestrzenią Hilberta.

DEFINICJA

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Układ wektorów $(\xi_i)_{i \in I}$ nazywamy **ortonormalnym**, jeśli $\langle \xi_i | \xi_j \rangle = \delta_{i,j}$ dla wszystkich $i, j \in I$.

- Każdy układ ortonormalny jest liniowo niezależny.
- W szczególności jeśli $(\xi_i)_{i \in I}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni $\mathcal{H}$, to możemy uważać $\{\xi_i\}_{i \in I}$ za podzbiór $\mathcal{H}$.

PRZYKŁADY

- ❶ Niech J będzie dowolnym zbiorem. Dla $j \in J$ niech δ_j oznacza funkcję charakterystyczną singletonu $\{j\}$. Wówczas $(\delta_j)_{j \in J}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni $\ell_2(J)$.
- ❷ Rozważmy przestrzeń Hilberta $L_2([-\pi, \pi])$ (domyślnie z miarą Lebesgue'a) i dla $n \in \mathbb{Z}$ niech

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Wówczas układ $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest ortonormalny. Układ ten nazywamy **układem trygonometrycznym**.

- Ciąg skalarów $(\alpha_i)_{i \in I}$ nazywamy **sumowalnym**, jeśli

$$\sup_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < +\infty}} \sum_{i \in I_0} |\alpha_i| < +\infty.$$

- Analogicznie ciąg $(\alpha_i)_{i \in I}$ jest **sumowalny z kwadratem**, jeśli

$$\sup_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < +\infty}} \sum_{i \in I_0} |\alpha_i|^2 < +\infty.$$

- Zauważmy, że jeśli $(\alpha_i)_{i \in I}$ jest sumowalny (lub sumowalny z kwadratem), to zbiór tych indeksów i , dla których $\alpha_i \neq 0$ jest co najwyżej przeliczalny.

- Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $(x_i)_{i \in I}$ będzie układem wektorów z X .
- Powiemy, że szereg $\sum_{i \in I} x_i$ jest zbieżny, jeśli ciąg uogólniony

$$\left(\sum_{i \in I_0} x_i \right)_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < +\infty}}$$

ma granicę w X .

- Zbieżność ciągu uogólnionego w przestrzeni Banacha jest równoważna spełnieniu warunku Cauchy'ego. W przypadku powyższego ciągu sum częściowych wygląda on tak:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\varepsilon \subset I \quad |I_\varepsilon| < +\infty \quad \forall I_1, I_2 \supset I_\varepsilon \quad |I_1|, |I_2| < +\infty \implies \left\| \sum_{i \in I_1} x_i - \sum_{i \in I_2} x_i \right\| < \varepsilon.$$

LEMAT

W przestrzeni Banacha każdy uogólniony ciąg wektorów spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

DOWÓD

Niech $(x_i)_{i \in I}$ spełnia warunek $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists i_\varepsilon \in I \quad \forall i_1, i_2 \succeq i_\varepsilon \quad \|x_{i_1} - x_{i_2}\| < \varepsilon$.

Możemy indukcyjnie zdefiniować $j_n \in I$ w taki sposób, że

- dla dowolnych $i, j \in I$ takich, że $i, j \succeq j_n$ mamy $\|x_i - x_j\| < \frac{1}{n}$,
- $j_n \succeq j_k$ dla wszystkich $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Teraz niech $y_n = x_{j_n}$. Na początek pokażemy, że $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Weźmy $\varepsilon > 0$ i N_ε takie, że $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Wówczas jeśli $m, n \geq N_\varepsilon$, to $j_n \succeq j_{N_\varepsilon}$ i $j_m \succeq j_{N_\varepsilon}$, a więc $\|y_n - y_m\| = \|x_{j_n} - x_{j_m}\| < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$.

Ciąg Cauchy'ego $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do jakiegoś wektora x . Pokażemy, że $(x_i)_{i \in I}$ również zbiega do x . W tym celu ponownie weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ i niech n_ε będzie takie, że $\frac{1}{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dalej istnieje m_ε takie, że $\|y_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $k \geq m_\varepsilon$.

Niech $K_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$. Wówczas dla $i \succeq j_{K_\varepsilon}$

$$\|x_i - x\| \leq \|x_i - x_{j_{K_\varepsilon}}\| + \|x_{j_{K_\varepsilon}} - x\| = \|x_i - x_{j_{K_\varepsilon}}\| + \|y_{K_\varepsilon} - x\| < \frac{1}{K_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

TWIERDZENIE

Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $(\alpha_i)_{i \in I}$ będzie sumowalnym z kwadratem układem skalarów. Wówczas szereg $\sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest zbieżny w $\mathcal{H}$.

DOWÓD

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ niech $I_\varepsilon \subset I$ będzie takim skończonym podzbiorem, że

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} |\alpha_i|^2 > \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 - \varepsilon.$$

Zauważmy, że wówczas dla dowolnego $J \subset I \setminus I_\varepsilon$ mamy $\sum_{i \in J} |\alpha_i|^2 < \varepsilon$.

Teraz niech I_1 i I_2 będą skończonymi podzbiorami I takimi, że $I_\varepsilon \subset I_1$ oraz $I_\varepsilon \subset I_2$ oraz dla $i \in I_1 \div I_2$ połóżmy

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i & i \in I_1 \\ -\alpha_i & i \in I_2 \end{cases}.$$

DOWÓD

Wtedy

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_1} \alpha_i \phi_i - \sum_{i \in I_2} \alpha_i \phi_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i \in I_1 \div I_2} \tilde{\alpha}_i \phi_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i \in I_1 \div I_2} \tilde{\alpha}_i \phi_i \left| \sum_{j \in I_1 \div I_2} \tilde{\alpha}_j \phi_j \right. \right\rangle \\ &= \sum_{i, j \in I_1 \div I_2} \overline{\tilde{\alpha}_i} \tilde{\alpha}_j \langle \phi_i | \phi_j \rangle = \sum_{i \in I_1 \div I_2} |\tilde{\alpha}_i|^2 = \sum_{i \in I_1 \div I_2} |\alpha_i|^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

ponieważ I_ε zawiera się w przecięciu I_1 i I_2 , a więc $I_1 \div I_2 \subset I \setminus I_\varepsilon$.

DOWÓD

Tym sposobem wykazaliśmy, że ciąg uogólniony

$$\left(\sum_{i \in F} \alpha_i \phi_i \right)_{\substack{F \subset I \\ |F| < +\infty}}$$

spełnia warunek Cauchy'ego, a co za tym idzie jest zbieżny w zupełnej przestrzeni $\mathcal{H}$. Innymi słowy szereg $\sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest zbieżny. $\square$