

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 4

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE

Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $\xi \in \mathcal{H}$. Dla $i \in I$ połóżmy $\alpha_i = \langle \phi_i | \xi \rangle$. Wówczas

- ❶ $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty$,
- ❷ wektor $\xi' = \xi - \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest ortogonalny do ϕ_j dla wszystkich $j \in I$.

DOWÓD

Ad ❶. Weźmy skończony $I_0 \subset I$ i niech $\eta = \xi - \sum_{i \in I_0} \alpha_i \phi_i$. Wtedy

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\eta\|^2 &= \left\langle \xi - \sum_{i \in I_0} \alpha_i \phi_i \middle| \xi - \sum_{j \in I_0} \alpha_j \phi_j \right\rangle = \|\xi\|^2 - \sum_{i \in I_0} \overline{\alpha_i} \langle \phi_i | \xi \rangle - \sum_{j \in I_0} \alpha_j \langle \xi | \phi_j \rangle + \sum_{i, j \in I_0} \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \phi_i | \phi_j \rangle \\ &= \|\xi\|^2 - \sum_{i \in I_0} \overline{\alpha_i} \alpha_i - \sum_{j \in I_0} \alpha_j \overline{\alpha_j} + \sum_{i \in I_0} \overline{\alpha_i} \alpha_i = \|\xi\|^2 - \sum_{i \in I_0} |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 \leq \|\xi\|^2 < +\infty$.

Ad ❷. Ponieważ iloczyn skalarny jest ciągły, dla dowolnego $j \in I$ mamy

$$\langle \phi_j | \xi' \rangle = \left\langle \phi_j \middle| \xi - \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i \right\rangle = \langle \phi_j | \xi \rangle - \sum_{i \in I} \alpha_i \langle \phi_j | \phi_i \rangle = \alpha_j - \alpha_j = 0,$$

tj. ξ' jest ortogonalny do ϕ_j .



UWAGA

W dowodzie ostatniego twierdzenia wykazaliśmy, że jeśli $(\phi_i)_{i \in I}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i $\xi \in \mathcal{H}$, to

$$\sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

Nierówność ta znana jest pod nazwą **nierówności Bessela**.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w $\mathcal{H}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶ układ $(\phi_i)_{i \in I}$ jest maksymalny,
- ❷ podprzestrzeń $\text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}$ jest gęsta w $\mathcal{H}$,
- ❸ dla dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ warunek $\langle \phi_i | \xi \rangle = 0$ dla wszystkich $i \in I$ pociąga $\xi = 0$,
- ❹ dla dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ mamy $\xi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$,
- ❺ dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ mamy $\langle \xi | \eta \rangle = \sum_{i \in I} \langle \xi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \eta \rangle$,
- ❻ dla dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ mamy $\|\xi\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2$.

DOWÓD

❶ $\Rightarrow$ ❷ Niech $\mathcal{M}$ oznacza domknięcie $\text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}$ (jest jasne, że $\mathcal{M}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{H}$) i przypuśćmy, że $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Weźmy wektor $\xi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$. Wtedy $\xi \neq 0$ i na mocy poprzedniego twierdzenia wektor

$$\xi' = \xi - \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$$

jest ortogonalny do wszystkich ϕ_j . Co więcej $\xi' \neq 0$, bo warunek $\xi' = 0$ oznacza $\xi \in \mathcal{M}$. Niech $\eta = \frac{\xi'}{\|\xi'\|}$. Wówczas η ma długość 1 i jest ortogonalny do wszystkich ϕ_j , a więc układ $\{\phi_i\}_{i \in I} \cup \{\eta\}$ jest ortonormalny i ściśle większy niż $\{\phi_i\}_{i \in I} \cup \{\eta\}$.

❷ $\Rightarrow$ ❸ Jeśli $\xi \in \mathcal{H}$ jest ortogonalny do ϕ_i dla wszystkich $i \in I$, to ξ jest ortogonalny do $\text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}$, tj.

$$\langle \eta | \xi \rangle = 0, \quad \eta \in \text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}.$$

Na mocy ciągłości iloczynu skalarnego otrzymujemy więc $\langle \eta | \xi \rangle = 0$ dla każdego $\eta \in \mathcal{H}$, np. $\eta = \xi$, co daje $\|\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle = 0$.

DOWÓD

③ $\Rightarrow$ ④ Połóżmy

$$\xi' = \xi - \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i.$$

Skoro ξ' jest ortogonalny do wszystkich ϕ_j , otrzymujemy $\xi' = 0$.

④ $\Rightarrow$ ⑤ Z ciągłości iloczynu skalarnego i jego antyliniowości względem pierwszego argumentu dostajemy

$$\langle \xi | \eta \rangle = \left\langle \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i \middle| \eta \right\rangle = \sum_{i \in I} \overline{\langle \phi_i | \xi \rangle} \langle \phi_i | \eta \rangle = \sum_{i \in I} \langle \xi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \eta \rangle.$$

⑤ $\Rightarrow$ ⑥ Kładziemy $\eta = \xi$.

⑥ $\Rightarrow$ ① Przypuśćmy, że S jest układem ortonormalnym w $\mathcal{H}$ takim, że $\{\phi_i\}_{i \in I} \subsetneq S$ i weźmy $\xi \in S \setminus \{\phi_i\}_{i \in I}$. Wtedy $1 = \|\xi\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2 = 0$. Sprzeczność ta pokazuje, że układ $\{\phi_i\}_{i \in I}$ jest maksymalny. □

DEFINICJA

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Układ ortonormalny $(\phi_i)_{i \in I}$ w $\mathcal{H}$ spełniający równoważne warunki z poprzedniego twierdzenia nazywamy **bazą ortonormalną** przestrzeni $\mathcal{H}$.

- Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
- Zapisanie dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ w postaci $\sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$ nazywamy **rozwinieciem Fouriera** ξ w bazie $(\phi_i)_{i \in I}$.

- Równość

$$\|\xi\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2$$

nosi nazwę **równości Parsevala**.

- Każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortonormalną.

WNIOSEK

Każda przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $\ell_2(I)$ dla pewnego I .

DOWÓD

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie jej bazą ortonormalną. Zdefiniujmy odwzorowanie $U: \mathcal{H} \rightarrow \ell_2(I)$ definiując $U\xi$ jako ciąg skalarów $(\langle \phi_i | \xi \rangle)_{i \in I}$. Tak zdefiniowane odwzorowanie U jest liniowe, a równość

$$\|U\xi\|_2^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2 = \|\xi\|^2$$

wynika z równości Parsevala. W końcu jeśli $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ jest dowolnym elementem $\ell_2(I)$, to $\alpha = U\xi$ dla $\xi = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$, czyli U jest izomorfizmem. $\square$

UWAGI

- ① Baza ortonormalna nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta nie jest jej bazą w sensie algebraicznym.
- ② Dowolne dwie bazy ortonormalne przestrzeni tej samej przestrzeni Hilberta są równoliczne (ćwiczenia).
- ③ Moc dowolnej bazy ortonormalnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy **wymiarem Hilberta** $\mathcal{H}$ i oznaczamy symbolem $\dim \mathcal{H}$.
- ④ Przestrzeń Hilberta jest ośrodkowa (zawiera przeliczalny podzbiór gęsty) wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna jej baza ortonormalna jest przeliczalna lub skończona.

TWIERDZENIE ŁUZINA

Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech μ będzie regularną miarą borelowską na X . Niech $A \subset X$ będzie podzbiorem borelowskim skończonej miary i $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ funkcją mierzalną równą zero poza A . Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $g \in C_c(X)$ taka, że

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

WNIOSEK

Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech μ będzie regularną miarą borelowską na X . Wówczas dla każdego $p \in [1, +\infty[$ przestrzeń $C_c(X)$ jest gęsta w $L_p(X, \mu)$.

LEMAT

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech S będzie zbiorem funkcji mierzalnych $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ o skończonym obrazie i równych zero poza zbiorem skończonej miary. Wówczas S jest gęstą podprzestrzenią $L_p(\Omega, \mu)$ dla każdego $p \in [1, +\infty[$.

DOWÓD

Na początek zauważmy, że zbiór S jest ewidentnie zawarty w $L_p(\Omega, \mu)$ dla wszystkich p .

Ustalmy p i niech $f \in L_p(\Omega, \mu)$ będzie nieujemna. Istnieje ciąg $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nieujemnych funkcji prostych taki, że $s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ punktowo i $s_n \leq s_{n+1} \leq f$ dla każdego n . W szczególności $|s_n|^p \leq f^p$, a więc $s_n \in S$ dla wszystkich n .

Co więcej $|f - s_n|^p = (f - s_n)^p \leq f^p$, a zatem na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej

$$\|f - s_n\|_p^p = \int_{\Omega} |f - s_n|^p d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Oznacza to, że $s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ w $L_p(\Omega, \mu)$.

Na koniec zauważmy, że dowolny element $L_p(\Omega, \mu)$ jest kombinacją liniową nieujemnych funkcji z $L_p(\Omega, \mu)$. □

DOWÓD WNIOSKU

Ustalmy $p \in [1, +\infty[$ i niech S oznacza przestrzeń zdefiniowaną w lemacie (dla przypadku $\Omega = X$). Wystarczy udowodnić, że każdy element S można przybliżać z dowolną dokładnością w $L_p(X, \mu)$ elementami przestrzeni $C_c(X)$.

Weźmy $s \in S$ oraz $\varepsilon > 0$. Z twierdzenia Łuzina wiemy, że istnieje $\tilde{g} \in C_c(X)$ taka, że zbiór

$$\Delta = \{x \in X \mid s(x) \neq \tilde{g}(x)\}$$

ma miarę mniejszą niż ε . Połóżmy $M = \sup |s|$ i niech

$$g(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x) & |\tilde{g}(x)| \leq M \\ M \frac{\tilde{g}(x)}{|\tilde{g}(x)|} & |\tilde{g}(x)| > M \end{cases}, \quad x \in X.$$

DOWÓD WNIOSKU

Wówczas

- $g \in C_c(X)$, gdyż g jest złożeniem g i ciągłego odwzorowania $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,
- $\sup |g| \leq M$.

Co więcej g różni się od $\tilde{g}$ tylko na zbiorze Δ , a więc $s = g$ na $X \setminus \Delta$. Mamy też

$$\|g - s\|_p^p = \int_X |g - s|^p d\mu = \int_{\Delta} |g - s|^p d\mu \leq \mu(\Delta) \sup |g - s|^p \leq \varepsilon (2M)^p,$$

co pokazuje, że w $L_p(X, \mu)$ możemy przybliżać dowolną funkcję $s \in S$ elementami przestrzeni $C_c(X)$ z dowolną precyzją. $\square$