

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 5

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE STONE'A-WEIERSTRASSA

Niech X będzie przestrzenią lokalnie zwartą i niech $\mathcal{A}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $C_0(X)$ taką, że

- ❶ dla dowolnych $f, g \in \mathcal{A}$ mamy $fg \in \mathcal{A}$,
- ❷ dla dowolnej $f \in \mathcal{A}$ mamy $\bar{f} \in \mathcal{A}$,
- ❸ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ istnieje $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- ❹ dla każdego $x \in X$ istnieje $f \in \mathcal{A}$ taka, że $f(x) \neq 0$.

Wówczas $\mathcal{A}$ jest gęsta w $C_0(X)$.

- Punkt ❶ mówi, że $\mathcal{A}$ jest **algebrą**,
- Punkt ❷ mówi, że $\mathcal{A}$ jest **algebrą z involucją (*-algebrą)**,
- Punkt ❸ mówi, że $\mathcal{A}$ **rozdziela punkty** X ,
- Punkty ❸ i ❹ razem mówią, że $\mathcal{A}$ **mocno rozdziela punkty** X .
- Gdy X jest przestrzenią zwartą, ❹ zamienia się zwykle na założenie, że $\mathbf{1}_X \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ jest **algebrą z jedyneką**).

WNIOSEK

Dla dowolnego $p \in [1, +\infty[$ przestrzeń $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ jest gęsta w $L_p(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Wystarczy udowodnić, że każda $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ jest granicą ciągu elementów $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ w normie $\|\cdot\|_p$. Ustalmy więc $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ i niech K będzie zbiorem postaci

$$K = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

zawierającym nośnik f .

Teraz rozważmy zbiór funkcji wielomianowych na $\mathbb{R}^d$ obciętych do K . Na mocy twierdzenia Stone'a-Weierstrassa zbiór ten jest gęstą podprzestrzenią $C(K)$ w normie $\|\cdot\|_{\infty, K}$ (norma jednostajna na $C(K)$). Stąd dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wielomian p_ε taki, że $\|p_\varepsilon - f\|_{\infty, K} < \varepsilon$. Teraz niech K' będzie zbiorem postaci

$$K' = [a'_1, b'_1] \times \cdots \times [a'_d, b'_d],$$

gdzie $a_i < a'_i < b'_i < b_i$ dla wszystkich i i miara Lebesgue'a zbioru $K \setminus K'$ jest mniejsza niż ε .

DOWÓD

Niech φ będzie gładką funkcją $\mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ o nośniku zawartym w K taką, że $\varphi \equiv 1$ na K' i połóżmy $g_\varepsilon = \varphi p_\varepsilon$. Zauważmy, że

$$\|g_\varepsilon - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx = \int_{K \setminus K'} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx + \int_{K'} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx.$$

Drugi składnik po prawej stronie szacujemy w następujący sposób:

$$\int_{K'} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx = \int_{K'} |p_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx \leq (\|p_\varepsilon - f\|_{\infty, K})^p |K'| \leq \varepsilon^p |K|.$$

DOWÓD

Natomiast pierwszy składnik szacujemy tak:

$$\begin{aligned}
 \int_{K \setminus K'} |g_\varepsilon(x) - f(x)|^p dx &\leq \left(\sup_{x \in K} |g_\varepsilon(x) - f(x)| \right)^p |K \setminus K'| \leq (\|g_\varepsilon\|_{\infty, K} + \|f\|_{\infty, K})^p |K \setminus K'| \\
 &\leq (\|p_\varepsilon\|_{\infty, K} + \|f\|_{\infty, K})^p |K \setminus K'| = (\|p_\varepsilon - f + f\|_{\infty, K} + \|f\|_{\infty, K})^p |K \setminus K'| \\
 &\leq (\|p_\varepsilon - f\|_{\infty, K} + 2\|f\|_{\infty, K})^p |K \setminus K'| < (\varepsilon + 2\|f\|_{\infty, K})^p \varepsilon.
 \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\|g_\varepsilon - f\|_p \leq \left((\varepsilon + 2\|f\|_{\infty, K})^p \varepsilon + \varepsilon^p |K| \right)^{\frac{1}{p}},$$

a ta wielkość może być dowolnie mała przy odpowiednio małym ε . □

UWAGA

Powyższy dowód można przeprowadzić także bez użycia twierdzenia Stone'a-Weierstrassa. Przykładową techniką alternatywnego dowodu jest tak zwana **regularyzacja przez splot**.

PRZYKŁAD

Niech I będzie dowolnym zbiorem. Dla $i \in I$ definiujemy funkcję $\delta_i: I \rightarrow \mathbb{C}$ kładąc

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad j \in I.$$

Jest jasne, że układ $\{\delta_i\}_{i \in I} \subset \ell_2(I)$ jest ortonormalny, a $\text{span}\{\delta_i \mid i \in I\}$ jest podprzestrzenią składającą się z funkcji $I \rightarrow \mathbb{C}$ o skończonym nośniku, a ta przestrzeń jest oczywiście gęsta w $\ell_2(I)$, bo każda funkcja $\alpha \in \ell_2(I)$ spełnia

$$\left\| \alpha - \sum_{i \in I_0} \alpha(i) \delta_i \right\|^2 = \sum_{i \in I \setminus I_0} |\alpha(i)|^2$$

dla dowolnego skończonego $I_0 \subset I$. W szczególności ciąg uogólniony

$$\left(\sum_{i \in I \setminus I_0} |\alpha(i)|^2 \right)_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < +\infty}}$$

jest zbieżny do zera.

PRZYKŁAD

Zdefiniujmy funkcje $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ kładąc

$$\phi_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{Z}.$$

Łatwo się przekonać, że $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest układem ortonormalnym w $L_2(\mathbb{T})$ (ze znormalizowaną miarą Lebesgue'a m). Zauważmy też, że podprzestrzeń

$$\mathcal{A} = \text{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

jest $*$ -podalgebrą z jedyneką w $C(\mathbb{T})$, która rozdziela punkty, a więc na mocy twierdzenia Stone'a-Weierstrassa, $\mathcal{A}$ jest gęsta w $C(\mathbb{T})$ w normie $\|\cdot\|_\infty$. Wynika stąd, że $\mathcal{A}$ jest gęsta w $C(\mathbb{T})$ w normie $\|\cdot\|_2$, bo jeśli $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ jednostajnie, to

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} |f_k - f|^2 dm \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_\infty^2 = 0.$$

Skoro $C(\mathbb{T})$ jest gęstą podprzestrzenią $L_2(\mathbb{T})$, natychmiast widzimy, że $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną $L_2(\mathbb{T})$.

PRZYKŁAD

Teraz rozważmy przestrzeń $L_2([-\pi, \pi])$ i układ trygonometryczny $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Przestrzeń $L_2([-\pi, \pi])$ jest izometrycznie izomorficzna z $L_2(\mathbb{T})$ poprzez odwzorowanie $W: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2([-\pi, \pi])$ zdefiniowane wzorem

$$(W\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi(e^{it}), \quad t \in]-\pi, \pi], \varphi \in L_2(\mathbb{T}).$$

Istotnie: nietrudno się przekonać, że W jest odwzorowaniem izometrycznym, a z drugiej strony dla każdego $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$ mamy $\psi = W\varphi$, gdzie

$$\varphi(z) = \sqrt{2\pi}\psi\left(\frac{1}{i}\log(z)\right), \quad z \in \mathbb{T}$$

przy czym $\frac{1}{i}\log$ oznacza odwzorowanie odwrotne do $]-\pi, \pi] \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{T}$. Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ mamy $\phi_n = W\phi_n$. Skoro $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $L_2(\mathbb{T})$, podprzestrzeń $\text{span}\{\phi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ jest gęsta w $L_2([-\pi, \pi])$. Innymi słowy $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $L_2([-\pi, \pi])$.

PRZYKŁAD

Na ćwiczeniach pokazaliśmy, że układ $\{\psi_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{Z}_+}$ otrzymany z **falki Haara**

$$\psi = \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}$$

poprzez $\psi_{n,k}(x) = 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n x - k)$ jest ortonormalny i $\text{span}\{\psi_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{Z}_+\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, gdzie S_n jest przestrzenią funkcji z $L_2(\mathbb{R})$ stałych na wszystkich przedziałach postaci $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ ($k \in \mathbb{Z}$). Przekonajmy się, że podprzestrzeń $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ jest gęsta w $L_2(\mathbb{R})$.

PRZYKŁAD

W tym celu weźmy $g \in C_c(\mathbb{R})$. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_\varepsilon > 0$ o tej własności, że $|x - y| < \delta_\varepsilon$ implikuje $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Wybierzmy $n \in \mathbb{Z}_+$ takie, że $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ i połóżmy

$$s_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g\left(\frac{k}{2^n}\right) \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[}$$

(suma jest skończona, gdyż nośnik g jest zwarty). Wówczas $s_\varepsilon \in S_n$ i $\|s_\varepsilon - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Teraz niech $[a, b]$ będzie zwartym przedziałem zawierającym nośnik g oraz nośnik s_ε . Wtedy $\|s_\varepsilon - g\|_2^2 \leq \varepsilon^2(b - a)$, a więc g można dowolnie dobrze aproksymować w $L_2(\mathbb{R})$ elementami podprzestrzeni $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

PRZYKŁAD

Wreszcie, skoro przestrzeń $C_c(\mathbb{R})$ jest gęsta w $L_2(\mathbb{R})$, widzimy, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ również jest gęsta w $L_2(\mathbb{R})$. W konsekwencji układ

$$\{\psi_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{Z}_+\}$$

jest bazą ortonormalną $L_2(\mathbb{R})$.

Można też wykazać, że układ $\{\psi_{n,k}\}_{n \in \mathbb{Z}_+, k=0, \dots, 2^n-1}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $L_2([0, 1])$.

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\emptyset \neq S \subset \mathcal{H}$.
- **Dopełnieniem ortogonalnym** S nazywamy zbiór

$$S^\perp = \{\eta \in \mathcal{H} \mid \forall \xi \in S \langle \xi | \eta \rangle = 0\}.$$

- Symbolem $S^{\perp\perp}$ oznaczać będziemy zbiór $(S^\perp)^\perp$.
- Dla porządku przyjmijmy, że dopełnieniem ortogonalnym zbioru pustego jest $\mathcal{H}$.

STWIERDZENIE

- 1 $S^\perp$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$,
- 2 mamy $S \subset S^{\perp\perp}$,
- 3 jeśli $S_1 \subset S_2$, to $S_1^\perp \supset S_2^\perp$.

DOWÓD

Punkt ❶ wynika natychmiast z ciągłości i liniowości (względem drugiego argumentu) iloczynu skalarnego.

Ad ❷. Jeśli $\xi \in S$, to ξ jest ortogonalny do każdego $\eta \in S^\perp$, a więc $\xi \in S^{\perp\perp}$.

Ad ❸. Jeśli $S_1 \subset S_2$, to każdy $\eta \in S_2^\perp$ jest ortogonalny do wszystkich elementów S_1 , a więc $\eta \in S_1^\perp$. □

LEMAT

Niech $S \subset \mathcal{H}$. Wówczas $S \cap S^\perp \subset \{0\}$.

DOWÓD

Niech $\xi \in S \cap S^\perp$. Skoro $\xi \in S^\perp$, wektor ten jest ortogonalny do wszystkich elementów S , a więc $\|\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle = 0$. □

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\mathcal{M}$ będzie domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$. Wówczas dla dowolnego $\varphi \in \mathcal{H}$ istnieją $\xi \in \mathcal{M}$ i $\eta \in \mathcal{M}^\perp$ takie, że $\varphi = \xi + \eta$. Ponadto rozkład ten jest jedyny.

DOWÓD

Weźmy $\varphi \in \mathcal{H}$ i niech $\{\phi_i\}_{i \in I}$ będzie bazą ortonormalną $\mathcal{M}$. Kładziemy

$$\xi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \varphi \rangle \phi_i \quad \text{and} \quad \eta = \varphi - \xi.$$

Powyższy szereg jest zbieżny. Ponadto $\xi \in \mathcal{M}$, a $\eta \in \mathcal{M}^\perp$.

Przypuśćmy, że φ ma inny rozkład $\varphi = \xi' + \eta'$ na $\xi' \in \mathcal{M}$ oraz $\eta' \in \mathcal{M}^\perp$. wtedy $\xi - \xi' = \eta' - \eta$ jest elementem $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$, a więc $\xi = \xi'$ i $\eta = \eta'$ na mocy lematu. $\square$

- Powyżej wykazaliśmy, że jeśli $\mathcal{M}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$, to $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

WNIOSEK

Niech $\mathcal{M}$ będzie domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$. Wówczas $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$.

DOWÓD

Wiemy, że $\mathcal{M}^{\perp\perp} \supset \mathcal{M}$. Z drugiej strony, jeśli $\varphi \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$, to zapisując $\varphi = \xi + \eta$, gdzie $\xi \in \mathcal{M}$ i $\eta \in \mathcal{M}^\perp$ otrzymujemy

$$\mathcal{M}^\perp \ni \eta = \varphi - \xi \in \mathcal{M}^{\perp\perp} + \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{\perp\perp},$$

a więc $\eta \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{M}^{\perp\perp} = \{0\}$.



WNIOSEK

Niech $S \subset \mathcal{H}$. Wówczas

- ① $S^\perp = \overline{\text{span}\{S\}}^\perp$,
- ② $S^{\perp\perp} = \overline{\text{span}\{S\}}$.

DOWÓD.

Mamy $S \subset \overline{\text{span}}\{S\}$, a więc $S^\perp \supset \overline{\text{span}}\{S\}^\perp$. Biorąc dopełnienie ortogonalne obu stron otrzymujemy $S^{\perp\perp} \subset \overline{\text{span}}\{S\}^{\perp\perp}$, a zatem $S^{\perp\perp} \subset \overline{\text{span}}\{S\}$ na mocy poprzedniego wniosku (dla $\mathcal{M} = \overline{\text{span}}\{S\}$).

Ale $S^{\perp\perp}$ jest domkniętą podprzestrzenią $\mathcal{H}$ zawierającą S , skąd wynika, że $S^{\perp\perp} \supset \overline{\text{span}}\{S\}$, co dowodzi punktu ❷.

Biorąc dopełnienie ortogonalne obu stron równości $S^{\perp\perp} = \overline{\text{span}}\{S\}$ dostajemy $(S^{\perp\perp})^\perp = \overline{\text{span}}\{S\}^\perp$. Ale

$$(S^{\perp\perp})^\perp = ((S^\perp)^\perp)^\perp = (S^\perp)^{\perp\perp} = S^\perp$$

ponownie na mocy poprzedniego wniosku (dla $\mathcal{M} = S^\perp$). Tym samym wykazaliśmy punkt ❶. □

DEFINICJA

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, a $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ domkniętą podprzestrzenią. Rzut na $\mathcal{M}$ wzdłuż $\mathcal{M}^\perp$ nazywamy **rzutem ortogonalnym** na $\mathcal{M}$ i oznaczamy symbolem $P_{\mathcal{M}}$.

UWAGA

Z w dowodzie ostatniego twierdzenia użyliśmy bardzo wygodnego wzoru na $P_{\mathcal{M}}$: dla dowolnej ortonormalnej bazy $\{\phi_i\}_{i \in I}$ przestrzeni $\mathcal{M}$ mamy

$$P_{\mathcal{M}}\xi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$$

dla wszystkich $\xi \in \mathcal{H}$.

UWAGA

W przypadku gdy podprzestrzeń $\mathcal{M}$ jest skończenie wymiarowa mamy też inny wzór na $P_{\mathcal{M}}$: niech $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,n}$ będzie dowolną (niekoniecznie ortogonalną) bazą $\mathcal{M}$ i niech G będzie macierzą Gama układu $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$

$$G = \begin{bmatrix} \langle \xi_1 | \xi_1 \rangle & \dots & \langle \xi_1 | \xi_N \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_N | \xi_1 \rangle & \dots & \langle \xi_N | \xi_N \rangle \end{bmatrix}$$

Wtedy dla dowolnego $\eta \in \mathcal{H}$ mamy

$$P_{\mathcal{M}}\eta = \sum_{i,j} (G^{-1})_{ij} \langle \xi_j | \eta \rangle \xi_i.$$

PRZYKŁAD

Rozważmy bazę $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ przestrzeni $L_2([-\pi, \pi])$ i niech $\mathcal{M} = \text{span}\{\phi_n \mid |n| < N\}$. Rzut ortogonalny $P_{\mathcal{M}}$ możemy opisać następującym wzorem:

$$P_{\mathcal{M}}\psi = \sum_{n=-N}^N \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_n = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} \psi(\tau) d\tau \right) \phi_n.$$

Stąd

$$(P_{\mathcal{M}}\psi)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in(t-\tau)} \psi(\tau) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t-\tau) \psi(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Funkcję D_N nazywamy **jądrem Dirichleta**.

PRZYKŁAD

Mamy

$$\begin{aligned} D_N(\theta) &= \frac{e^{-iN\theta}}{2\pi} \sum_{n=0}^{2N} e^{in\theta} = \frac{e^{-iN\theta}}{2\pi} \frac{1 - e^{i(2N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iN\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})\theta} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-i\frac{1}{2}\theta} - e^{i\frac{1}{2}\theta}} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\theta)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}\theta)} \end{aligned}$$

dla $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, natomiast $D_N(\theta) = \frac{2N+1}{2\pi}$ dla $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.