

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 6

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE

Niech C będzie niepustym domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $\varphi \in \mathcal{H} \setminus C$. Wówczas istnieje jedyny wektor $\xi \in C$ minimalizujący funkcję $C \ni \zeta \mapsto \|\varphi - \zeta\| \in]0, +\infty[$. Ponadto ξ jest jedynym elementem C takim, że

$$\operatorname{Re} \langle \zeta - \xi | \varphi - \xi \rangle \leq 0, \quad \zeta \in C.$$

- Dowód na ćwiczeniach.

UWAGA

Domknięta podprzestrzeń $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ jest oczywiście domkniętym zbiorem wypukłym, a więc dla $\varphi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$ istnieje dokładnie jeden wektor $\xi \in \mathcal{M}$ minimalizujący funkcję $\mathcal{M} \ni \zeta \mapsto \|\varphi - \zeta\|$. Dla dowolnego $\zeta \in \mathcal{M}$ mamy

$$\|\varphi - \zeta\|^2 = \|(\varphi - P_{\mathcal{M}}\varphi) + (P_{\mathcal{M}}\varphi - \zeta)\|^2 = \|\varphi - P_{\mathcal{M}}\varphi\|^2 + \|P_{\mathcal{M}}\varphi - \zeta\|^2 \geq \|\varphi - P_{\mathcal{M}}\varphi\|^2.$$

Widzimy stąd, że wektorem minimalizującym odległość od φ jest $\xi = P_{\mathcal{M}}\varphi$.

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech Θ będzie niezerowym ciągłym funkcjonałem na $\mathcal{H}$.
- Funkcjonał Θ obcięty do $(\ker \Theta)^\perp$ jest różnowartościowym odwzorowaniem liniowym w $\mathbb{C}$, a więc $\dim(\ker \Theta)^\perp \leq 1$.
- Skoro $\Theta \neq 0$, musi być $\dim(\ker \Theta)^\perp = 1$.

STWIERDZENIE

Dla dowolnego niezerowego funkcjonału liniowego Λ na przestrzeni Banacha X mamy

$$\left(\Lambda \text{ jest ciągły} \right) \iff \left(\ker \Lambda \text{ nie jest gęstą podprzestrzenią w } X \right).$$

- W szczególności jeśli Θ jest nieciągłym funkcjonałem na $\mathcal{H}$, to $\dim(\ker \Theta)^\perp = 0$.

DOWÓD STWIERDZENIA.

Nietrywialna jest implikacja $\Leftarrow$. Przypuśćmy, że podprzestrzeń $\ker \Theta$ nie jest gęsta. Wówczas istnieje kula domknięta $\overline{\text{Ball}}(x, r)$ taka, że

$$\overline{\text{Ball}}(x, r) \cap \ker \Theta = \emptyset. \quad (\bullet)$$

Rozważmy teraz zbiór $\Theta(\overline{\text{Ball}}(x, r)) \subset \mathbb{C}$. Mamy

$$\Theta(\overline{\text{Ball}}(x, r)) = \Theta(x) + \Theta(\overline{\text{Ball}}(0, r)).$$

Ponadto zbiór $\Theta(\overline{\text{Ball}}(0, r))$ jest niezmienniczy na mnożenie przez liczbę α o module nie większym niż 1 i z założenia zawiera jakąś niezerową liczbę. W takim razie albo jest on ograniczony, albo jest równy całemu ciału $\mathbb{C}$. W drugim z tych dwóch przypadków istnieje wektor $y \in \overline{\text{Ball}}(0, r)$ taki, że $\Theta(y) = -\Theta(x)$, a zatem

$$0 = \Theta(x + y) \in \Theta(\overline{\text{Ball}}(x, r))$$

co stoi w sprzeczności z $(\bullet)$. Oznacza to, że funkcjonal Θ jest ograniczony na $\overline{\text{Ball}}(0, r)$, co z kolei jest równoważne ciągłości Θ . □

TWIERDZENIE RIESZA O REPREZENTACJI

Niech Θ będzie ciągłym funkcjonałem na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wektor $\theta \in \mathcal{H}$ taki, że

$$\Theta(\xi) = \langle \theta | \xi \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ponadto $\|\theta\| = \|\Theta\|$.

DOWÓD.

Jedyność wektora θ jest oczywista tak samo jak fakt, że dla $\Theta = 0$ mamy $\theta = 0$. Przyjmijmy więc, że $\Theta \neq 0$.

Wiemy już, że $\dim(\ker \Theta)^\perp = 1$. Niech $\tilde{\theta}$ będzie wektorem jednostkowym w $(\ker \Theta)^\perp$. W szczególności $\{\tilde{\theta}\}$ jest bazą ortonormalną $(\ker \Theta)^\perp$. Wynika stąd, że rozkład dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ na składowe w $\ker \Theta$ i $(\ker \Theta)^\perp$ wygląda tak:

$$\xi = (\xi - \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}) + \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}.$$

W konsekwencji

$$\Theta(\xi) = \Theta\left((\xi - \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}) + \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}\right) = \Theta\left(\langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}\right) = \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \Theta(\tilde{\theta}) = \left\langle \overline{\Theta(\tilde{\theta})} \tilde{\theta} \middle| \xi \right\rangle,$$

co pokazuje, że $\theta = \overline{\Theta(\tilde{\theta})} \tilde{\theta}$ jest poszukiwanym wektorem.

W szczególności $\|\Theta\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \theta | \xi \rangle| = \|\theta\|$.



DEFINICJA

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. **Formą półtoraliniową** na $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ nazywamy funkcję $F: \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ taką, że

- ❶ dla każdego $\xi \in \mathcal{H}$ odwzorowanie $\mathcal{K} \ni \eta \mapsto F(\xi, \eta) \in \mathbb{C}$ jest liniowe,
- ❷ dla każdego $\eta \in \mathcal{K}$ odwzorowanie $\mathcal{H} \ni \xi \mapsto F(\xi, \eta) \in \mathbb{C}$ jest antyliniowe.

Formę F nazywamy **ograniczoną** jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że $|F(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|\|\eta\|$ dla wszystkich $(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$.

- Najmniejsza stała C taką, że $|F(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|\|\eta\|$ dla wszystkich $(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ jest równa $\sup_{\|\xi\|=1=\|\eta\|} |F(\xi, \eta)|$. Nazywamy ją czasem **normą** F i oznaczamy symbolem $\|F\|$.

PRZYKŁAD

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i niech $T: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ będzie odwozorowaniem liniowym. Wtedy wzór

$$F(\xi, \eta) = \langle \xi | T\eta \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathcal{K}$$

definiuje formę półtoraliniową na $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$. Forma ta jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i w tym przypadku $\|F\| = \|T\|$.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i niech F będzie ograniczoną formą półtoraliniową na $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$. Wówczas istnieje jedyny operator $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ taki, że $F(\xi, \eta) = \langle \xi | T\eta \rangle$ dla wszystkich $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{K}$.

DOWÓD

Dla dowolnego $\eta \in \mathcal{H}$ odwzorowanie $\Theta_\eta: \mathcal{H} \ni \xi \mapsto \overline{F(\xi, \eta)} \in \mathbb{C}$ jest liniowe i ograniczone, a więc na mocy twierdzenia Riesz o reprezentacji istnieje jedyny wektor $\theta_\eta \in \mathcal{H}$ taki, że $\Theta_\eta = \langle \theta_\eta | \cdot \rangle$. Innymi słowy

$$F(\xi, \eta) = \langle \xi | \theta_\eta \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ponadto dla $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mamy

$$F(\xi, \alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \alpha F(\xi, \eta_1) + \beta F(\xi, \eta_2) = \alpha \langle \xi | \theta_{\eta_1} \rangle + \beta \langle \xi | \theta_{\eta_2} \rangle = \langle \xi | \alpha\theta_{\eta_1} + \beta\theta_{\eta_2} \rangle$$

dla wszystkich ξ . Tak więc z jednoznaczności wektora $\theta_{\alpha\eta_1 + \beta\eta_2}$ wynika, że $\eta \mapsto \theta_\eta$ jest odwzorowaniem liniowym.

DOWÓD

Definiujemy więc odwzorowanie liniowe $T: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ kładąc $T\eta = \theta_\eta$. Sprawdźmy, że T jest odwzorowaniem ograniczonym:

$$\|T\| = \sup_{\|\eta\|=1} \|T\eta\| = \sup_{\|\eta\|=1} \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \xi | T\eta \rangle| \leq C,$$

gdzie C jest taką stałą, że $|F(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|\|\eta\|$ dla wszystkich ξ i η .

Jedyność T wynika natychmiast z jedyności wektora θ_η dla każdego $\eta \in \mathcal{K}$. $\square$

UWAGA

Powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja pomiędzy ograniczonymi formami półtoraliniowymi na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, a ograniczonymi operatorami $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Co więcej, z dowodu natychmiast wynika, że jeśli forma F odpowiada operatorowi T , to $\|F\| = \|T\|$.

CIEKAWOSTKA

Niech $A, B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Wówczas istnieje liczba $\mu \in \mathbb{T}$ taka, że $B = \mu A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\langle \xi | A \eta \rangle| = |\langle \xi | B \eta \rangle|$ dla wszystkich $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta \in \mathcal{H}$.

- Niech F będzie formą półtoraliniową na $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.
- Jest jasne, że funkcja

$$F^\dagger: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\eta, \xi) \longmapsto \overline{F(\xi, \eta)} \in \mathbb{C}$$

jest formą półtoraliniową i $F^\dagger$ jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczona jest F (i jeśli są ograniczone, to $\|F^\dagger\| = \|F\|$).

- Tak więc każdemu operatorowi $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ odpowiada dokładnie jeden operator $T^\dagger \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ taki, że

$$\langle \xi | T\eta \rangle = \overline{\langle \eta | T^\dagger \xi \rangle} = \langle T^\dagger \xi | \eta \rangle$$

dla wszystkich ξ i η .

DEFINICJA

Niech $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Jedyny operator $T^\dagger \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ spełniający

$$\langle \xi | T\eta \rangle = \langle T^\dagger \xi | \eta \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathcal{H}$$

nazywamy operatorem **hermitowsko sprzężonym** do T .

DEFINICJA

Operator $T \in B(\mathcal{H})$ nazywamy **samosprężonym**, jeśli $T = T^\dagger$.

PRZYKŁAD

Niech $\mathcal{M}$ będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Sprawdźmy, że $P_{\mathcal{M}}$ jest operatorem samosprężonym. Weźmy $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ i rozłóżmy każdy z nich na komponenty z $\mathcal{M}$ i $\mathcal{M}^\perp$: $\varphi = \xi + \eta$ i $\psi = \xi' + \eta'$. Wtedy

$$\langle \varphi | P_{\mathcal{M}} \psi \rangle = \langle \xi + \eta | \xi' \rangle = \langle \xi | \xi' \rangle = \langle \xi | \xi' + \eta' \rangle = \langle P_{\mathcal{M}} \varphi | \psi \rangle.$$

Wektory φ i ψ wybraliśmy dowolnie, a więc $P_{\mathcal{M}}^\dagger = P_{\mathcal{M}}$.

UWAGA

Jeśli $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ są takimi domkniętymi podprzestrzeniami, że $\mathcal{H} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ (w sensie algebraicznym), to rzut na $\mathcal{M}_1$ wzdłuż $\mathcal{M}_2$ jest ograniczony i jest on samosprężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1^\perp$.