

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 7

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

STWIERDZENIE

- ❶ Dla każdego $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ mamy $(T^\dagger)^\dagger = T$,
- ❷ jeśli $T_1, T_2 \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, to $(\alpha T_1 + \beta T_2)^\dagger = \bar{\alpha} T_1^\dagger + \bar{\beta} T_2^\dagger$,
- ❸ jeśli $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{L})$, to $(ST)^\dagger = T^\dagger S^\dagger$,
- ❹ mamy $\|T^\dagger\| = \|T\|$ dla każdego $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

DOWÓD.

Ad ❶. To wynika np. z faktu, że $(F^\dagger)^\dagger = F$ dla dowolnej formy półtoraliniowej na $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$.

Ad ❷. Łatwo sprawdzamy, że dla dowolnych $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta \in \mathcal{K}$ mamy

$$\langle \xi | (\alpha T_1 + \beta T_2) \eta \rangle = \alpha \langle \xi | T_1 \eta \rangle + \beta \langle \xi | T_2 \eta \rangle = \alpha \langle T_1^\dagger \xi | \eta \rangle + \beta \langle T_2^\dagger \xi | \eta \rangle = \langle (\bar{\alpha} T_1^\dagger + \bar{\beta} T_2^\dagger) \xi | \eta \rangle,$$

a więc operator $\bar{\alpha} T_1^\dagger + \bar{\beta} T_2^\dagger$ spełnia warunek jednoznacznie definiujący operator $(\alpha T_1 + \beta T_2)^\dagger$.

Ad ❸. Podobnie jak w poprzednim punkcie, dla dowolnego $\zeta \in \mathcal{L}$, $\eta \in \mathcal{K}$ mamy

$$\langle \zeta | ST \eta \rangle = \langle S^\dagger \zeta | T \eta \rangle = \langle T^\dagger S^\dagger \zeta | \eta \rangle$$

a zatem $T^\dagger S^\dagger$ spełnia warunek definiujący $(ST)^\dagger$.

Punkt ❹ wynika natychmiast z omówionej wcześniej równości $\|F^\dagger\| = \|F\|$ dla wszystkich form półtoraliniowych. □

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $\psi \in \mathcal{H}$. Symbolem $|\psi\rangle$ oznacza się często odwzorowanie liniowe $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}$ przeprowadzające 1 na ψ , a symbolem $\langle\psi|$ odwzorowanie sprzężone do $|\psi\rangle$.
- Nietrudno sprawdzić, że $\langle\psi|$ przeprowadza dowolny $\xi \in \mathcal{H}$ na skalar $\langle\psi|\xi\rangle$.
- Dla dowolnych $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ złożenie odwzorowań $\mathbb{C} \xrightarrow{|\varphi\rangle} \mathcal{H} \xrightarrow{\langle\psi|} \mathbb{C}$ jest odwzorowaniem mnożenia przez skalar $\langle\psi|\varphi\rangle$. Innymi słowy $\langle\psi| \circ |\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$.
- Bardzo często korzystamy z operatorów postaci $|\varphi\rangle\langle\psi|$ (przeprowadzający ξ na $\langle\psi|\xi\rangle\varphi$). Przykładowo jeśli $\{\phi_i\}_{i \in I}$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$, to

$$P_{\mathcal{M}} = \sum_{i \in I} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

w tym sensie, że

$$P_{\mathcal{M}}\xi = \sum_{i \in I} \langle\phi_i|\xi\rangle\phi_i$$

dla każdego $\xi \in \mathcal{H}$.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i niech V będzie odwzorowaniem liniowym $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶ V jest odwzorowaniem izometrycznym,
- ❷ V jest ograniczone i $V^\dagger V = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$,
- ❸ dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ mamy $\langle V\xi | V\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$.

DOWÓD.

① $\Rightarrow$ ②: Jest jasne, że operator izometryczny jest ograniczony. Dalej stosując formułę polaryzacyjną do formy półtoraliniowej $F(\xi, \eta) = \langle V\xi | V\eta \rangle$ ($\xi, \eta \in \mathcal{H}$) oraz fakt, że $\|V\psi\| = \|\psi\|$ dla wszystkich ψ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle V\xi | V\eta \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \left\langle V(\eta + \mathbf{i}^k \xi) \middle| V(\eta + \mathbf{i}^k \xi) \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \|V(\eta + \mathbf{i}^k \xi)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \|\eta + \mathbf{i}^k \xi\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \left\langle \eta + \mathbf{i}^k \xi \middle| \eta + \mathbf{i}^k \xi \right\rangle = \langle \xi | \eta \rangle. \end{aligned}$$

Stąd dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ mamy $\langle V^\dagger V\xi | \eta \rangle = \langle V\xi | V\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$, czyli $V^\dagger V\xi = \xi$.

② $\Rightarrow$ ③: Jeśli $V^\dagger V = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ to dla $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ mamy $\langle V\xi | V\eta \rangle = \langle V^\dagger V\xi | \eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$.

③ $\Rightarrow$ ①: Podstawiając $\eta = \xi$ w równości $\langle V\xi | V\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ otrzymujemy $\|V\xi\|^2 = \|\xi\|^2$ dla każdego $\xi \in \mathcal{H}$, co oznacza, że V jest izometrią. □

UWAGA

Ograniczoność V w punkcie ② jest potrzebna, ponieważ operator sprzężony zdefiniowaliśmy tylko dla operatorów ograniczonych. Okazuje się, że można tę definicję rozszerzyć na dowolny operator liniowy zdefiniowany na gęstej podprzestrzeni $\mathcal{H}$ i wtedy ograniczoność V wynika z warunku $V^\dagger V = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

DEFINICJA

Operator $V \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ spełniający warunki z powyższego twierdzenia nazywamy **izometria**.

Operator $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ jest **unitarny**, jeśli U jest surjektywną izometria.

- Niech X i Y będą przestrzeniami Banacha.
- Przypomnijmy, że operator $T \in B(X, Y)$ jest odwracalny, jeśli istnieje $S \in B(Y, X)$ taki, że $TS = \mathbb{1}_Y$, $ST = \mathbb{1}_X$.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta i niech U będzie odwzorowaniem liniowym $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ① U jest unitarny,
- ② U jest ograniczony i odwracalny oraz $U^{-1} = U^\dagger$,
- ③ U jest ograniczony i mamy $U^\dagger U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ oraz $UU^\dagger = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$,
- ④ U jest surjekcją i dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ mamy $\langle U\xi | U\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$.

DOWÓD.

① $\Rightarrow$ ②: Jeśli U jest unitarny, to jest odwracalny (i U^{-1} jest odwzorowaniem izometrycznym). Skoro U jest izometryczny, mamy $U^\dagger U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, a mnożąc obie strony tej równości z prawej przez U^{-1} otrzymujemy $U^\dagger = U^{-1}$.

Implikacja ② $\Rightarrow$ ③ jest oczywista.

③ $\Rightarrow$ ④: Skoro $UU^\dagger = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$, operator U jest surjektywny. Fakt, że U zachowuje iloczyn skalarny wynika natychmiast z równości $U^\dagger U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$.

④ $\Rightarrow$ ①: Zakładamy, że U jest surjekcją, a więc musimy jedynie wykazać, że jest też izometrią. W tym celu wystarczy położyć $\eta = \xi$ we wzorze $\langle U\xi | U\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$. $\square$

PRZYKŁAD

Na przestrzeni $L_2(\mathbb{R}^d)$ rozważmy operator τ_y ($y \in \mathbb{R}^d$) zdefiniowany wzorem

$$(\tau_y \psi)(x) = \psi(x - y), \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Jest oczywiste, że $\|\tau_y \psi\|_2 = \|\psi\|_2$ dla wszystkich ψ i wszystkich y , a także, że operator τ_y jest surjekcją. Tak więc τ_y jest unitarny dla każdego y . Co więcej, dla dowolnych $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$\tau_{y_1} \circ \tau_{y_2} = \tau_{y_1 + y_2},$$

czyli $y \mapsto \tau_y$ jest homomorfizmem z grupy $\mathbb{R}^d$ w grupę wszystkich operatorów unitarnych na $L_2(\mathbb{R}^d)$. Sprawdźmy teraz, że homomorfizm ten jest ciągły w tym sensie, że dla dowolnego $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ odwzorowanie

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \tau_y \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$$

jest ciągłe.

PRZYKŁAD

Weźmy $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ i $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^d)$ taka, że $\|\psi - g_\varepsilon\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ i zdefiniujemy

$$S = \{x + z \mid x \in \text{supp } g_\varepsilon, \|z\| \leq 1\}.$$

Funkcja g jest jednostajnie ciągła, a więc istnieje $\delta_\varepsilon \in]0, 1]$ taka, że $\|x - y\| < \delta$ implikuje $|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{|S|}}$. Wówczas jeśli $\|y\| < \delta_\varepsilon$, to

$$\begin{aligned} \|\tau_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon(x - y) - g_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_S |g_\varepsilon(x - y) - g_\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\leq |S| \sup_{x \in S} |g_\varepsilon(x - y) - g_\varepsilon(x)|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\begin{aligned} \|\tau_y \psi - \psi\|_2 &\leq \|\tau_y \psi - \tau_y g_\varepsilon\|_2 + \|\tau_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - \psi\|_2 \\ &= \|\psi - g_\varepsilon\|_2 + \|\tau_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - \psi\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

jeśli tylko $\|y\| < \delta_\varepsilon$.

PRZYKŁAD

Przypomnijmy, że splot $f * g$ funkcji $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ i $g \in L_p(\mathbb{R}^d)$ zdefiniowaliśmy wzorem

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y - x)g(x) \, dx, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Używając operatorów $\{\tau_y\}_{y \in \mathbb{R}^d}$ możemy rozszerzyć tę definicję na pary funkcji z $L_2(\mathbb{R}^d)$. Istotnie, jeśli $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ to kładąc $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y - x)| |\psi(x)| \, dx &= \langle \tau_y |\tilde{\phi}| \mid |\psi| \rangle = |\langle \tau_y |\tilde{\phi}| \mid |\psi| \rangle| \\ &\leq \| \tau_y |\tilde{\phi}| \|_2 \| |\psi| \|_2 = \| |\tilde{\phi}| \|_2 \| |\psi| \|_2 = \| \tilde{\phi} \|_2 \| \psi \|_2 = \| \phi \|_2 \| \psi \|_2 \end{aligned}$$

na mocy unitarności operatorów τ_y oraz $\phi \mapsto \tilde{\phi}$.

PRZYKŁAD

Wynika stąd, że więc całka

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y - x) \psi(x) \, dx$$

jest dobrze określona dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^d$.

Ponadto funkcja

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y - x) \psi(x) \, dx = \langle \tau_y \tilde{\phi} \mid \psi \rangle$$

jest ciągła, a więc spłot dwóch elementów $L_2(\mathbb{R}^d)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną (na mocy nierówności Schwarz'a).

PRZYKŁAD

Niech $A \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem o niezerowej i skończonej mierze Lebesgue'a i połóżmy $\psi = \mathbf{1}_A$. Wówczas nośnik funkcji

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \langle \tau_y \psi | \psi \rangle \in \mathbb{R}$$

zawiera się w zbiorze $A - A = \{a - b \mid a, b \in A\}$, gdyż

$$\langle \tau_y \psi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x - y) \mathbf{1}_A(x) dx = \int_A \mathbf{1}_A(x - y) dx.$$

Ponadto funkcja ta jest ciągła i niezerowa (jej wartość w zerze wynosi $\|\psi\|_2^2 \neq 0$), a więc jej nośnik musi zawierać zbiór otwarty. Tym samym wykazaliśmy, że dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^d$ o niezerowej mierze Lebesgue'a zbiór $A - A$ zawiera kulę. W szczególności jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest mierzalny i niezerowej miary Lebesgue'a, to $A - A$ zawiera przedział. Fakt ten jest znany jako twierdzenie Steinhausa.