

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 8

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta.
- Twierdzenie Riesz o reprezentacji pozwala utożsamić przestrzeń $\mathcal{H}^*$ z $\mathcal{H}$ poprzez bijekcję

$$\mathcal{H} \ni \theta \longmapsto \langle \theta | \in \mathcal{H}^*.$$

- Odwzorowanie to jest izometryczne, ale anty-liniowe.
- Przestrzeń $\mathcal{H}^*$ jest przestrzenią Hilberta (choćby dlatego, że norma na $\mathcal{H}^*$ spełnia tożsamość równoległoboku). Łatwo sprawdzić, że iloczyn skalarny na $\mathcal{H}^*$ wygląda tak:

$$\langle \langle \psi | | \langle \phi | \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$$

dla wszystkich $\phi, \psi \in \mathcal{H}$.

- Niech X będzie przestrzenią Banacha, a Y jej domkniętą podprzestrzenią.
- Na przestrzeni X/Y definiujemy **normę ilorazową**:

$$\|x + Y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|.$$

- Przestrzeń X/Y z normą ilorazową jest przestrzenią Banacha.
- Jeśli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta, a $\mathcal{M}$ jej domkniętą podprzestrzenią, to przestrzeń Banacha $\mathcal{H} / \mathcal{M}$ jest naturalnie izomorficzna z $\mathcal{M}^\perp$:

$$\mathcal{H} / \mathcal{M} \ni \psi + \mathcal{M} \longmapsto P_{\mathcal{M}^\perp} \psi \in \mathcal{M}^\perp.$$

- Powyższy izomorfizm jest izometrią dla normy ilorazowej na $\mathcal{H} / \mathcal{M}$ i normy na $\mathcal{M}$ odziedziczonej z $\mathcal{H}$. W szczególności $\mathcal{H} / \mathcal{M}$ jest przestrzenią Hilberta.

- Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta.
- Na przestrzeni $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny taki, że odwzorowania

$$\mathcal{H} \ni \xi \mapsto \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \quad \text{ i } \quad \mathcal{K} \ni \eta \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$$

są izometriami o ortogonalnych obrazach.

- Jest to $\left\langle \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \xi | \xi' \rangle + \langle \eta | \eta' \rangle$.
- Przestrzeń $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ ze zdefiniowanym powyżej iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta.
- Naturalny izomorfizm

$$(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}) \oplus \mathcal{L} \ni \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \\ \theta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \varphi \\ \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus (\mathcal{K} \oplus \mathcal{L})$$

jest odwzorowaniem unitarnym.

PRZYKŁAD

Niech (Ω, μ) i (Λ, ν) będą przestrzeniami z miarą i niech $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \mu)$ oraz $\mathcal{K} = L_2(\Lambda, \nu)$. Przestrzeń $\Omega \sqcup \Lambda$ możemy wyposażyć w miarę $\mu \sqcup \nu$ zdefiniowaną na σ -algebrze podzbiorów $\Omega \sqcup \Lambda$, których przecięcia z Ω i Λ są mieralne wzorem

$$(\mu \sqcup \nu)(A) = \mu(A \cap \Omega) + \nu(A \cap \Lambda).$$

Wówczas każda para mierzalnych funkcji (f, g) odpowiednio na Ω i na Λ definiuje mierzalną funkcję $f \sqcup g$ na $\Omega \sqcup \Lambda$:

$$(f \sqcup g)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ g(x) & x \in \Lambda \end{cases}.$$

Nietrudno wykazać, że dla $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$ i $\psi \in L_2(\Lambda, \nu)$ mamy $\varphi \sqcup \psi \in L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$, ale też dowolna $\theta \in L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$ jest postaci $\theta = \varphi \sqcup \psi$ dla jednoznacznie wyznaczonych $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$ i $\psi \in L_2(\Lambda, \nu)$.

PRZYKŁAD

Równie łatwo widzimy, że odwzorowanie

$$L_2(\Omega, \mu) \oplus L_2(\Lambda, \nu) \ni \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \longmapsto \varphi \sqcup \psi \in L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$$

jest operatorem unitarnym. Innymi słowy $L_2(\Omega, \mu) \oplus L_2(\Lambda, \nu) \cong L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$.

Możemy też postąpić odwrotnie – zacząć od przestrzeni z miarą i rozłożyć ją na części. Przykładowo

$$L_2(\mathbb{R}) \cong L_2(]-\infty, 0]) \oplus L_2(]0, +\infty[),$$

przy czym jednopunktowy podzbiór $\{0\}$ został pominięty, gdyż jest miary zero.

TWIERDZENIE

Niech $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$ będzie rodziną przestrzeni Hilberta i oznaczmy symbolem $\mathcal{D}$ zbiór ciągów $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ takich, że dla każdego j mamy $\xi_j \in \mathcal{H}_j$ oraz $\sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2 < +\infty$.

Wówczas

- ❶ $\mathcal{D}$ jest przestrzenią wektorową z naturalnymi operacjami dodawania i mnożenia przez skalary:
 - dla $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ i $\eta = (\eta_j)_{j \in J}$ definiujemy $\xi + \eta$ jako ciąg $(\xi_j + \eta_j)_{j \in J}$,
 - dla $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ kładziemy $\alpha\xi = (\alpha\xi_j)_{j \in J}$,
- ❷ dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{D}$ szereg $\sum_{j \in J} \langle \xi_j | \eta_j \rangle$ jest zbieżny bezwzględnie i jego suma definiuje iloczyn skalarny na $\mathcal{D}$, z którym $\mathcal{D}$ jest przestrzenią Hilberta.

DOWÓD

Weźmy $\xi = (\xi_j)_{j \in J}, \eta = (\eta_j)_{j \in J} \in \mathscr{D}$. Dzięki nierówności Schwarza w $\ell_2(J)$ mamy

$$\sum_{j \in J} \|\xi_j\| \|\eta_j\| \leq \sqrt{\sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2} \sqrt{\sum_{j \in J} \|\eta_j\|^2} < +\infty,$$

a więc szereg

$$\sum_{j \in J} \|\xi_j + \eta_j\|^2 = \sum_{j \in J} (\|\xi_j\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \xi_j | \eta_j \rangle + \|\eta_j\|^2) \leq \sum_{j \in J} (\|\xi_j\|^2 + 2 \|\xi_j\| \|\eta_j\| + \|\eta_j\|^2)$$

jest zbieżny i w konsekwencji $\xi + \eta \in \mathscr{D}$.

Fakt, że $\alpha \xi \in \mathscr{D}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$ jest jasny.

DOWÓD

Oszacowanie $\sum_{j \in J} |\langle \xi_j | \eta_j \rangle| \leq \sum_{j \in J} \|\xi_j\| \|\eta_j\| < +\infty$ gwarantuje zbieżność sumy $\sum_{j \in J} \langle \xi_j | \eta_j \rangle$.

Oznaczając ją symbolem $\langle \xi | \eta \rangle$ zauważamy, że

- wyrażenie $\langle \xi | \eta \rangle$ jest liniowe względem η ,
- $\langle \xi | \eta \rangle = \overline{\langle \eta | \xi \rangle}$,
- $\langle \xi | \xi \rangle > 0$, jeśli $\xi \neq 0$.

Tak więc odwzorowanie $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi | \eta \rangle$ jest iloczynem skalarnym na $\mathcal{D}$ i wyznaczona przez ten iloczyn skalarny norma elementu $\gamma = (\gamma_j)_{j \in J} \in \mathcal{D}$ jest równa

$$\|\gamma\| = \sqrt{\langle \gamma | \gamma \rangle} = \left(\sum_{j \in J} \langle \gamma_j | \gamma_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j \in J} \|\gamma_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DOWÓD

Przechodzimy do dowodu zupełności $\mathcal{D}$. Niech $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{D}$, tj. dla każdego n mamy $\xi_n = (\xi_{n,j})_{j \in J}$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że $m, n \geq N_\varepsilon$

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \sum_{j \in J} \|\xi_{n,j} - \xi_{m,j}\|^2 < \varepsilon^2.$$

Wynika stąd po pierwsze, że dla każdego j ciąg $(\xi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego $\mathcal{H}_j$. Kładziemy $\xi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n,j}$ oraz $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$.

weźmy teraz skończony podzbiór $J_0 \subset J$. Wtedy

$$\sum_{j \in J_0} \|\xi_{n,j} - \xi_j\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_0} \|\xi_{n,j} - \xi_{m,j}\|^2 \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} \|\xi_{n,j} - \xi_{m,j}\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

jeśli tylko $n \geq N_\varepsilon$.

DOWÓD

Wynika stąd, że dla $n \geq N_\varepsilon$ mamy

$$\sum_{j \in J} \|\xi_{n,j} - \xi_j\|^2 = \sup_{\substack{J_0 \subset J \\ |J_0| < +\infty}} \sum_{j \in J_0} \|\xi_{n,j} - \xi_j\|^2 \leq \varepsilon^2$$

i w konsekwencji

- $\sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2 = \sum_{j \in J} \|\xi_j - \xi_{n,j} + \xi_{n,j}\|^2 \leq \sum_{j \in J} (\|\xi_j - \xi_{n,j}\|^2 + 2\|\xi_j - \xi_{n,j}\| \|\xi_{n,j}\| + \|\xi_{n,j}\|^2) < +\infty$,
czyli $\xi \in \mathcal{D}$,
- dla wszystkich $n \geq N_\varepsilon$ mamy $\|\xi_n - \xi\| \leq \varepsilon$, a więc $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ w normie przestrzeni $\mathcal{D}$.



DEFINICJA

Przestrzeń $\mathcal{D}$ skonstruowaną w ostatnim twierdzeniu nazywamy **sumą prostą** przestrzeni Hilberta $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$. Oznaczamy ją symbolem $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$.

PRZYKŁADY

- ❶ Dla dowolnego zbioru J przestrzeń Hilberta $\ell_2(J)$ jest izometrycznie izomorficzna z sumą prostą $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$, gdzie $\mathcal{H}_j = \mathbb{C}$ dla każdego j . Innymi słowy $\ell_2(J) \cong \bigoplus_J \mathbb{C}$.
- ❷ $L_2(\mathbb{R}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_2([n, n+1[) \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} L_2([0, 1[)$.

LEMAT

Niech $T \in B(\mathcal{H})$. Wówczas $(\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T^\dagger$.

DOWÓD

$\xi \in \ker T^\dagger$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle T^\dagger \xi | \eta \rangle = 0$ dla wszystkich $\eta \in \mathcal{H}$. Stąd $\xi \in \ker T^\dagger$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle \xi | T\eta \rangle = 0$ dla wszystkich η , tj. wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi \perp \operatorname{ran} T$. □

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i $P \in B(\mathcal{H})$. Jeśli $P^2 = P$ i $P = P^\dagger$, to istnieje domknięta podprzestrzeń $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ taka, że $P = P_{\mathcal{M}}$.

DOWÓD

Niech $\mathcal{M}$ będzie obrazem P . Skoro $P^2 = P$, mamy $\text{ran } P = \ker(\mathbb{1} - P)$, a więc $\mathcal{M}$ jest domknięta.

Teraz na mocy lematu $\ker P = \ker P^\dagger = (\text{ran } P)^\perp = \mathcal{M}^\perp$, czyli P jest rzutem na $\mathcal{M}$ wzdłuż $\mathcal{M}^\perp$. □

- Mamy więc bijekcję pomiędzy domkniętymi podprzestrzeniami w $\mathcal{H}$, a rzutami ortogonalnymi w $B(\mathcal{H})$ (operatorami $P \in B(\mathcal{H})$ takimi, że $P^\dagger P = P$).