

# METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 9

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

## TWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{N}$  będą domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ .  
Wówczas

- ❶  $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$  (równoważnie  $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = 0$ ),
- ❷  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$  (równoważnie  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M}}$ ).

W przypadku ❶ podprzestrzeń  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  jest domknięta i  $P_{\mathcal{M} + \mathcal{N}} = P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$ .

## DOWÓD

Ad ❶. Dla dowolnych  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  mamy  $\langle P_{\mathcal{M}}\xi | P_{\mathcal{N}}\eta \rangle = \langle \xi | P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\eta \rangle$ , co pokazuje, że jeśli  $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ , to  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\xi = 0$  dla wszystkich  $\xi$ , a jeśli  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$ , to obrazy  $P_{\mathcal{M}}$  i  $P_{\mathcal{N}}$  są ortogonalne.

Ad ❷. Ze wzoru  $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$  wynika, że  $P_{\mathcal{N}}\xi = \xi$  dla dowolnego  $\xi \in \mathcal{M}$ , czyli  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ . Odwrotnie, jeśli  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ , to dla każdego  $\psi \in \mathcal{H}$  wektor  $P_{\mathcal{M}}\psi$  należy do  $\mathcal{N}$ , a więc  $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}\psi = P_{\mathcal{M}}\psi$ .

Założmy teraz, że  $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ . Podprzestrzeń  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  jest domknięta, gdyż jeśli  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem elementów  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$  zbieżnym do  $\psi \in \mathcal{H}$ , to rozkładając

$$\psi_n = \xi_n + \eta_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

na składowe w  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{N}$  otrzymujemy ciągi  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oraz  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , które oba spełniają warunek Cauchy'ego, ponieważ  $\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \|\xi_n - \xi_m\|^2 + \|\eta_n - \eta_m\|^2$ .

## DOWÓD

Skoro  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{N}$  są domknięte, ciągi  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mają granice  $\xi \in \mathcal{M}$  oraz  $\eta \in \mathcal{N}$  i  $\psi = \xi + \eta \in \mathcal{N} + \mathcal{M}$ .

Zauważmy dalej, że operator  $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$  jest samosprężony i idempotentny, a ponadto jest on identycznością na  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ . Co więcej, dla każdego  $\zeta \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp = (\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp$  mamy  $(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})\zeta = 0$ , a zatem  $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$  jest rzutem ortogonalnym na  $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ .  $\square$

## LEMAT

Dla dowolnych domkniętych podprzestrzeni  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$  mamy  $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp = (\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp$ .

## DOWÓD.

Skoro  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M} + \mathcal{N}$  i  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} + \mathcal{N}$ , mamy  $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp \subset \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp$ . Z drugiej strony, jeśli  $\psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp$ , to  $\psi$  jest ortogonalny do każdego wektora postaci  $\xi + \eta$  dla  $\xi \in \mathcal{M}$ ,  $\eta \in \mathcal{N}$ .  $\square$

- W szczególności  $P_{\overline{\mathcal{M} + \mathcal{N}}} = \mathbb{1} - P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$ .

## STWIERDZENIE

Dla dowolnych domkniętych podprzestrzeni  $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$  i dowolnego  $\psi \in \mathcal{H}$  mamy

$$P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}} \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \psi,$$

gdzie  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem operatorów

$$(P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}} P_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{M}}, \dots).$$

## DOWÓD

Jest jasne, że  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$  jest domkniętą podprzestrzenią. Weźmy dowolne  $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ . Wtedy dla  $m, n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\langle A_m \psi | A_n \varphi \rangle = \langle \psi | A_{m+n-\lambda(m,n)} \varphi \rangle,$$

gdzie

$$\lambda(m, n) = \begin{cases} 1 & m \text{ i } n \text{ mają tę samą parzystość} \\ 0 & m \text{ i } n \text{ mają różne parzystości} \end{cases}.$$

Teraz ustalmy  $\psi \in \mathcal{H}$ . Wtedy dla dowolnych  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|A_m \psi - A_n \psi\|^2 &= \langle A_m \psi - A_n \psi | A_m \psi - A_n \psi \rangle \\ &= \langle A_m \psi | A_m \psi \rangle - \langle A_m \psi | A_n \psi \rangle - \langle A_n \psi | A_m \psi \rangle + \langle A_n \psi | A_n \psi \rangle \\ &= \langle \psi | A_{2m-1} \psi \rangle - 2\langle \psi | A_{m+n-\lambda(m,n)} \psi \rangle + \langle \psi | A_{2n-1} \psi \rangle. \end{aligned}$$

## DOWÓD

Zauważmy też, że liczba  $m + n - \lambda(m, n)$  jest zawsze nieparzysta, a dokładniej  $m + n - \lambda(m, n) = 2k - 1$ , gdzie

$$k = \begin{cases} \frac{m+n}{2} & m \text{ i } n \text{ mają tę samą parzystość} \\ \frac{m+n+1}{2} & m \text{ i } n \text{ mają różne parzystości} \end{cases}.$$

Innymi słowy kładąc  $u_p = \langle \psi | A_{2p-1} \psi \rangle$  otrzymujemy  $\|A_m \psi - A_n \psi\|^2 = u_m - 2u_k + u_n$ , (przy  $k$  zdefiniowanym tak jak wyżej).

Tak więc, aby zobaczyć, że  $(A_n \psi)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Cauchy'ego wystarczy przekonać się, że ciąg skalarów  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny. Tak jest, gdyż  $u_n \geq 0$  dla wszystkich  $n$  i

$$u_{n+1} = \langle \psi | A_{2n+1} \psi \rangle = \|A_{n+1} \psi\|^2 = \|PA_n \psi\|^2,$$

gdzie  $P$  jest jednym z rzutów  $P_{\mathcal{M}}$  lub  $P_{\mathcal{N}}$ .

## DOWÓD

W obu przypadkach  $P = P_{\mathcal{M}}$  i  $P = P_{\mathcal{N}}$  mamy

$$u_{n+1} = \|PA_n\psi\|^2 \leq \|A_n\psi\|^2 = \langle \psi | A_{2n-1} \psi \rangle = u_n$$

czyli ciąg  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest nierosnący.

Niech  $Q\psi$  oznacza granicę ciągu  $(A_n\psi)_{n \in \mathbb{N}}$ . Odwzorowanie  $\psi \mapsto Q\psi$  jest liniowe, a ponieważ  $\|A_n\| \leq 1$  dla wszystkich  $n$ , jest ono również ograniczone, czyli  $Q \in B(\mathcal{H})$ . Wykażemy, że  $Q$  jest rzutem ortogonalnym na  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ .

Dla dowolnych  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  skalary  $\langle A_n\psi | A_n\varphi \rangle = \langle \psi | A_{2n-1}\varphi \rangle$  zbiegają z jednej strony do  $\langle Q\psi | Q\varphi \rangle = \langle \psi | Q^\dagger Q\varphi \rangle$ , a z drugiej do  $\langle \psi | Q\varphi \rangle$ . Oznacza to, że

$$\langle \psi | Q^\dagger Q\varphi \rangle = \langle \psi | Q\varphi \rangle, \quad \psi, \varphi \in \mathcal{H},$$

a stąd  $Q^\dagger Q = Q$ . Wynika stąd, że  $Q$  jest samosprężony i  $Q^2 = Q$ .

## DOWÓD

Tak więc  $\mathcal{Q}$  jest rzutem ortogonalnym na pewną podprzestrzeń  $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ . Mamy  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ , gdyż  $A_n \xi = \xi$  dla dowolnego  $\xi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ . Z drugiej strony, jeśli  $\psi \in \mathcal{L}$ , to tożsamości

$$P_{\mathcal{M}} A_n = \begin{cases} A_n & n \text{ jest nieparzyste} \\ A_{n+1} & n \text{ jest parzyste} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

implikują

$$P_{\mathcal{M}} \psi = P_{\mathcal{M}} \mathcal{Q} \psi = P_{\mathcal{M}} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mathcal{M}} A_n \psi = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \psi = \mathcal{Q} \psi = \psi,$$

a więc  $\psi \in \mathcal{M}$ . Tak samo pokazujemy, że  $P_{\mathcal{N}} \psi = \psi$ , tj.  $\psi \in \mathcal{N}$ . □

## UWAGA

Niech  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{N}$  będą domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Wówczas rzut  $Q = P_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$  można wyrazić także na następujące sposoby:

$$Q\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n\psi, \quad \psi \in \mathcal{H},$$

gdzie  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem

$$(P_{\mathcal{N}}, P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}, P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}, P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}, \dots),$$

a

$$C_n = (P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}})^n, \quad D_n = (P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}})^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Istotnie, ciągi  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  są podciągami ciągu  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , a ciąg  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem powstałym w identyczny sposób, co  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  przy zamienionych podprzestrzeniach  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{N}$ .

- Niech  $V$  i  $W$  będą przestrzeniami wektorowymi.
- **Algebraicznym iloczynem tensorowym**  $V$  i  $W$  nazywamy przestrzeń  $V \otimes_{\text{alg}} W$  wraz z dwuliniowym odwzorowaniem  $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes_{\text{alg}} W$  taką, że dla każdej przestrzeni wektorowej  $Z$  i każdego dwuliniowego odwzorowania  $F: V \times W \rightarrow Z$  istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe  $f: V \otimes_{\text{alg}} W \rightarrow Z$  takie, że diagram

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{F} & Z \\
 \downarrow \otimes & \nearrow f & \\
 V \otimes_{\text{alg}} W & & 
 \end{array}$$

jest przemienny.

- Iloczyn tensorowy istnieje i jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.
- Wartość odwzorowania  $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes_{\text{alg}} W$  na elemencie  $(v, w) \in V \times W$  oznaczamy symbolem  $v \otimes w$  i nazywamy **tensorem prostym**.

## TWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny na  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$  taki, że

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

## DOWÓD

Jedyność iloczynu skalarnego spełniający warunek z twierdzenia jest oczywista, gdyż tensory proste rozpinają przestrzeń  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ .

Dla dowodu istnienia ustalmy  $\varphi_1 \in \mathcal{H}$  i  $\psi_1 \in \mathcal{K}$ . Odwzorowanie

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (\varphi_2, \psi_2) \longmapsto \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \in \mathbb{C}$$

jest dwuliniowe, a więc istnieje jedyny funkcjonał liniowy  $\Phi_{\varphi_1, \psi_1}$  na  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$  taki, że

$$\Phi_{\varphi_1, \psi_1}(\varphi_2 \otimes \psi_2) = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

## DOWÓD

Teraz niech  $\mathcal{E}$  będzie przestrzenią wektorową wszystkich antyliniowych funkcjonałów na  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ . Wtedy funkcja  $\overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}}$  zdefiniowana wzorem

$$\overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}}(\xi) = \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}(\xi)}, \quad \xi \in \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$$

jest elementem  $\mathcal{E}$  dla każdej pary  $(\varphi_1, \psi_1)$ . Co więcej odwzorowanie

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (\varphi_1, \psi_1) \longmapsto \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}} \in \mathcal{E}$$

jest dwuliniowe. Wynika stąd, że istnieje jedyne liniowe  $\Xi: \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}$  takie, że

$$\Xi(\varphi_1, \psi_1) = \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}}, \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}, \psi_1 \in \mathcal{K}.$$

## DOWÓD

Wykazaliśmy, że dla dowolnych  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$  i  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}$  mamy

$$(\Xi(\varphi_1 \otimes \psi_1))(\varphi_2 \otimes \psi_2) = \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}(\varphi_2 \otimes \psi_2)} = \overline{\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle} = \langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle.$$

Możemy więc zdefiniować iloczyn skalarny na  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ :

$$\langle \xi | \eta \rangle = \overline{(\Xi(\xi))(\eta)}, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}.$$

Na mocy tej definicji wyrażenie  $\langle \xi | \eta \rangle$  jest liniowe względem  $\eta$ .

## DOWÓD

Niech  $\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \otimes \xi_i^2$  oraz  $\eta = \sum_{j=1}^M \eta_j^1 \otimes \eta_j^2$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \langle \xi | \eta \rangle &= \overline{(\Xi(\xi))(\eta)} = \overline{\left( \Xi \left( \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \otimes \xi_i^2 \right) \right) \left( \sum_{j=1}^M \eta_j^1 \otimes \eta_j^2 \right)} = \overline{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\Xi(\xi_i^1 \otimes \xi_i^2))(\eta_j^1 \otimes \eta_j^2)} \\ &= \overline{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \eta_j^1 | \xi_i^1 \rangle \langle \eta_j^2 | \xi_i^2 \rangle} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \xi_i^1 | \eta_j^1 \rangle \langle \xi_i^2 | \eta_j^2 \rangle, \end{aligned}$$

co w szczególności pokazuje, że  $\langle \xi_1 \otimes \eta_1 | \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle$ .

## DOWÓD

Z powyższego rachunku wynika także, że

$$\langle \eta | \xi \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \eta_j^1 | \xi_i^1 \rangle \langle \eta_j^2 | \xi_i^2 \rangle = \overline{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \xi_i^1 | \eta_j^1 \rangle \langle \xi_i^2 | \eta_j^2 \rangle} = \overline{\langle \xi | \eta \rangle}$$

dla dowolnych  $\xi, \eta \in \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ .

Wreszcie jeśli  $\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \otimes \xi_i^2$  jest niezerowym elementem  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ , to stosując ortogonalizację Grama-Schmidta możemy spowodować, że  $\xi_1^2, \dots, \xi_N^2$  są ortonormalne i wtedy

$$\langle \xi | \xi \rangle = \sum_{i=1}^N \|\xi_i^1\|^2 > 0.$$

Tym samym pokazaliśmy, że  $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi | \eta \rangle$  jest iloczynem skalarnym na  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ . □

## DEFINICJA

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą przestrzeniami Hilberta. **Iloczynem tensorowym**  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  nazywamy uzupełnienie przestrzeni  $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$  w normie pochodzącej od iloczynu skalarne go opisanego w powyższym twierdzeniu. Przestrzeń tę oznaczamy symbolem  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ .

## UWAGA

Niech  $\xi \in \mathcal{H}$ ,  $\eta \in \mathcal{K}$ . Wówczas

$$\|\xi \otimes \eta\|^2 = \langle \xi \otimes \eta | \xi \otimes \eta \rangle = \|\xi\|^2 \|\eta\|^2,$$

czyli  $\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \|\eta\|$ . Norma na (algebraicznym) iloczynie tensorowym przestrzeni z normą, która ma tę własność nazywa się **normą krzyżową**. Innymi słowy naturalna norma na iloczynie tensorowym przestrzeni Hilberta jest normą krzyżową.