

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 10

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

UWAGA

Niech $\mathcal{H}$ będzie skończenie wymiarowa i wybierzmy bazę ortonormalną $\{e_1, \dots, e_d\}$ przestrzeni $\mathcal{H}$. Rozważmy algebraiczny iloczyn tensorowy $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$, stosując ortogonalizację Grama-Schmidta względem pierwszej nogi iloczynu tensorowego możemy dowolny element $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ zapisać w formie $\sum_{i=1}^d e_i \otimes \xi_i$ dla pewnych $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathcal{K}$. Wynika stąd natychmiast, że przestrzeń $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ jest izomorficzna z sumą prostą $\mathcal{K} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}$ (d kopii) poprzez operator unitarny

$$\sum_{i=1}^d e_i \otimes \xi_i \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_d \end{bmatrix}$$

(nietrudno sprawdzić, że odwzorowanie to jest izometryczne dla norm pochodzących od iloczynów skalarnych na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ i $\mathcal{K} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}$). Zauważmy, że ta przestrzeń $\mathcal{K} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}$ jest zupełna, a więc $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ jest automatycznie przestrzenią Hilberta: $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

STWIERDZENIE

Niech $\{\phi_i\}_{i \in I}$ i $\{\psi_j\}_{j \in J}$ będą bazami ortonormalnymi przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Wówczas układ $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ jest bazą ortonormalną $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

DOWÓD

Układ $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$, a do $\text{span}\{\varphi_i \otimes \psi_j \mid i \in I, j \in J\}$ należą wszystkie tensory proste postaci $\xi \otimes \eta$, gdzie $\xi \in \text{span}\{\varphi_i \mid i \in I\}$, a $\eta \in \text{span}\{\psi_j \mid j \in J\}$. Jeśli $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta \in \mathcal{K}$, to istnieją ciągi $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w $\text{span}\{\varphi_i \mid i \in I\}$ oraz $\text{span}\{\psi_j \mid j \in J\}$ takie, że $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ i $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta$. Dalej, na mocy ciągłości normy mamy

$$\begin{aligned} \|\xi_n \otimes \eta_n - \xi \otimes \eta\|^2 &= \langle \xi_n \otimes \eta_n - \xi \otimes \eta \mid \xi_n \otimes \eta_n - \xi \otimes \eta \rangle \\ &= \|\xi_n \otimes \eta_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \xi_n \otimes \eta_n \mid \xi \otimes \eta \rangle + \|\xi \otimes \eta\|^2 \\ &= \|\xi_n\|^2 \|\eta_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \xi_n \mid \xi \rangle \langle \eta_n \mid \eta \rangle + \|\xi\|^2 \|\eta\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K} \subset \overline{\text{span}\{\varphi_i \otimes \psi_j \mid i \in I, j \in J\}}$. □

PRZYKŁAD

Niech (Ω, μ) i (Λ, ν) będą σ -skończonymi przestrzeniami z miarą i rozważmy $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$ oraz $\psi \in L_2(\Lambda, \nu)$. Wówczas na mocy twierdzenia Fubiniego funkcja

$$\Omega \times \Lambda \ni (x, y) \longmapsto \varphi(x)\psi(y) \in \mathbb{C}$$

jest całkowalna z kwadratem względem miary produktowej $\mu \otimes \nu$ na $\Omega \times \Lambda$.

Funkcję $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ nazywamy **iloczynem tensorowym** funkcji φ i ψ , a oznaczamy symbolem $\varphi \otimes \psi$. Odwzorowanie $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \otimes \psi$ jest dwuliniowe $L_2(\Omega, \mu) \times L_2(\Lambda, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$, a więc wyznacza operator liniowy $L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$. W następnym twierdzeniu pokażemy, że przy jednym dodatkowym założeniu operator ten jest unitarny.

LEMAT

- ❶ Niech $\{\xi_i\}_{i \in I}$ i $\{\eta_i\}_{i \in I}$ będą bazami ortonormalnymi przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden operator unitarny $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ taki, że $U\xi_i = \eta_i$ dla wszystkich i .
- ❷ Niech $\{\xi_i\}_{i \in I}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $U_0: \text{span}\{\xi_i \mid i \in I\} \rightarrow \mathcal{K}$ będzie odwzorowaniem liniowym w przestrzeń Hilberta takim, że układ $\{U_0\xi_i \mid i \in I\}$ jest bazą ortonormalną $\mathcal{K}$. Wówczas U_0 rozszerza się jednoznacznie do operatora unitarnego $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$.

DOWÓD.

Ad ❶. Najpierw definiujemy U_0 na $\text{span}\{\xi_i \mid i \in I\}$ kładąc $U_0\xi_i = \eta_i$. Operator ten jest izometryczny, a więc rozszerza się jednoznacznie do izometrii $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, która ma gęsty obraz (bo zawiera on $\text{span}\{\eta_i \mid i \in I\}$). Ale obraz izometrii jest zawsze domknięty, więc U jest operatorem unitarnym. Ad ❷. Dla dowolnego

$\xi \in \text{span}\{\xi_i \mid i \in I\}$ zapisanego w postaci $\xi = \sum_{n=1}^N \lambda^n \xi_{i_n}$ dla pewnego podukładu $\{\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}\}$ układu $\{\xi_i\}_{i \in I}$ mamy

$$\|U_0\xi\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^N \lambda^n U_0\xi_{i_n} \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\lambda^n|^2 = \|\xi\|^2,$$

a więc U_0 jest odwzorowaniem izometrycznym. Stąd U_0 rozszerza się jednoznacznie do izometrii $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$, która jest surjekcją, gdyż ma gęsty obraz. □

TWIERDZENIE

Niech (Ω, μ) i (Λ, ν) będą σ -skończonymi przestrzeniami z miarą takimi, że przestrzenie Hilberta $L_2(\Omega, \mu)$ i $L_2(\Lambda, \nu)$ są ośrodkowe. Wówczas istnieje odwzorowanie liniowe

$$L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu) \longrightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$$

przeprowadzające każdy tensor prosty $\xi \otimes \eta \in L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu)$ na funkcję

$$\Omega \times \Lambda \ni (x, y) \longmapsto \xi(x)\eta(y) \in \mathbb{C}.$$

Odwzorowanie to rozszerza się do operatora unitarnego $L_2(\Omega, \mu) \otimes L_2(\Lambda, \nu) \rightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$.

DOWÓD

Niech $\xi \in L_2(\Omega, \mu)$ i $\eta \in L_2(\Lambda, \nu)$. Para (ξ, η) wyznacza klasę $T(\xi, \eta)$ mierzalnej funkcji $\Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ (względem relacji równości prawie wszędzie) wzorem

$$T(\xi, \eta)(x, y) = \xi(x)\eta(y), \quad (x, y) \in \Omega \times \Lambda.$$

Z twierdzenia Fubiniego natychmiast wynika, że $T(\xi, \eta)$ jest klasą funkcji całkowalnej z kwadratem względem miary produktowej $\mu \otimes \nu$ na $\Omega \times \Lambda$ i jest oczywiste, że odwzorowanie

$$L_2(\Omega, \mu) \times L_2(\Lambda, \nu) \ni (\xi, \eta) \longmapsto T(\xi, \eta) \in L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$$

jest dwuliniowe. Tak więc istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe

$$U_0: L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu) \longrightarrow L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$$

takie, że $U_0(\xi \otimes \eta) = T(\xi, \eta)$ dla wszystkich $\xi \in L_2(\Omega, \mu)$ i $\eta \in L_2(\Lambda, \nu)$.

DOWÓD

Rozważmy $\Xi \in L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu)$. Wtedy (stosując ortogonalizację Grama-Schmidta do pierwszej nogi Ξ) możemy zapisać

$$\Xi = \sum_{k=1}^M \gamma_k \otimes \rho_k,$$

gdzie $\{\gamma_1, \dots, \gamma_M\}$ są ortonormalne. Wtedy

$$\|U_0 \Xi\|_2^2 = \int_{\Omega \times \Lambda} \sum_{k=1}^M |\gamma_k(x) \rho_k(y)|^2 d(\mu \otimes \nu)(x, y) = \sum_{k=1}^M \int_{\Lambda} |\rho_k(y)|^2 d\nu(y) = \sum_{k=1}^M \|\rho_k\|_2^2 = \|\Xi\|_2^2,$$

a więc U_0 jest odwzorowaniem izometrycznym. Oznacza to, że U_0 rozszerza się jednoznacznie do operatora ograniczonego (izometrii) z przestrzeni Hilberta $L_2(\Omega, \mu) \otimes L_2(\Lambda, \nu)$ w $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$.

DOWÓD

Teraz niech $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ i $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będą bazami ortonormalnymi $L_2(\Omega, \mu)$ i $L_2(\Lambda, \nu)$. Z twierdzenia Fubiniego natychmiast wnioskujemy, że funkcje

$$U_0(\phi_i \otimes \psi_j): \Omega \times \Lambda \ni (x, y) \mapsto \phi_i(x)\psi_j(y) \in \mathbb{C}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

tworzą układ ortonormalny w $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$. Wykażemy, że element przestrzeni $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$, który jest ortogonalny do wszystkich tych funkcji musi być zerem, a więc funkcje te tworzą bazę ortonormalną przestrzeni $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$.

Weźmy więc $\theta \in L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$ taką, że

$$\int_{\Omega \times \Lambda} \overline{\theta(x, y)} \phi_i(x) \psi_j(y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) = 0$$

dla wszystkich i i j .

DOWÓD

Zauważmy, że skoro $|\theta|^2$ jest całkowalna na $\Omega \times \Lambda$, na mocy twierdzenia Fubiniego, funkcja $\theta(\cdot, y): \Omega \ni x \mapsto \theta(x, y)$ należy do $L_2(\Omega, \mu)$ dla prawie wszystkich $y \in \Lambda$.

Co więcej, iloczyn skalarny $\theta(\cdot, y)$ z dowolną funkcją $\xi \in L_2(\Omega, \mu)$ jest (prawie wszędzie zdefiniowaną) funkcją całkowalną z kwadratem, gdyż

$$\int_{\Lambda} |\langle \theta(\cdot, y) | \xi \rangle|^2 d\nu(y) \leq \int_{\Lambda} \|\theta(\cdot, y)\|_2^2 \|\xi\|_2^2 d\nu(y) = \int_{\Omega \times \Lambda} |\theta|^2 d(\mu \otimes \nu) \|\xi\|_2^2 = \|\theta\|_2^2 \|\xi\|_2^2.$$

Dalej rachunek

$$0 = \int_{\Lambda} \left(\int_{\Omega} \overline{\theta(x, y)} \phi_i(x) d\mu(x) \right) \psi_j(y) d\nu(y) = \int_{\Lambda} \langle \theta(\cdot, y) | \phi_i \rangle \psi_j(y) d\nu(y)$$

pokazuje, że dla każdego i element $y \mapsto \langle \theta(\cdot, y) | \phi_i \rangle$ przestrzeni $L_2(\Lambda, \nu)$ jest ortogonalny do ψ_j dla wszystkich j .

DOWÓD

Innymi słowy funkcja $y \mapsto \langle \theta(\cdot, y) | \phi_i \rangle$ jest równa zero na $\Lambda \setminus \Delta_i$ dla pewnego zbioru $\Delta_i \subset \Lambda$ miary zero.

W konsekwencji, dla $y \in \Lambda \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \right)$ funkcja $\theta(\cdot, y)$ jest równa zero prawie wszędzie na Ω , a stąd $\theta = 0$ w $L_2(\Omega \times \Lambda, \mu \otimes \nu)$.

Na mocy punktu ❷ lematu odwzorowanie U_0 (obcięte do $L_2(\Omega, \mu) \otimes_{\text{alg}} L_2(\Lambda, \nu)$) rozszerza się jednoznacznie do operatora unitarnego

$$U: L_2(\Omega, \mu) \otimes L_2(\Lambda, \nu) \longrightarrow L_2(\Omega \times, \Lambda, \mu \otimes \nu).$$

Ale z pierwszej części dowodu wiemy, że operator U_0 rozszerza się jednoznacznie do operatora ograniczonego pomiędzy tymi przestrzeniami, a zatem oba rozszerzenia są identyczne. $\square$

PRZYKŁAD

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, a I zbiorem. Rozważmy iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H}$ i niech $\{\delta_i\}_{i \in I}$ będzie bazą standardową $\ell_2(I)$. Dalej niech $\{\psi_j\}_{j \in J}$ będzie bazą ortonormalną $\mathcal{H}$. Mamy wówczas naturalną bijekcję pomiędzy bazami ortonormalnymi $\{\delta_i \otimes \psi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ przestrzeni $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H}$ i bazą ortonormalną $\bigsqcup_I \{\psi_j\}_{j \in J} = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times \{\psi_j\}_{j \in J}$ przestrzeni $\bigoplus_I \mathcal{H}$. Tak więc istnieje operator unitarny $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H} \rightarrow \bigoplus_I \mathcal{H}$ przeprowadzający jedną bazę na drugą. W szczególności $\ell_2(I) \otimes \mathcal{H} \cong \bigoplus_I \mathcal{H}$.

UWAGA

Nietrudno się przekonać, że jeśli $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ są przestrzeniami Hilberta, to jedyny operator $U: (\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{H} \otimes (\mathcal{K} \otimes \mathcal{L})$ przeprowadzający dowolny tensor postaci $(\xi \otimes \eta) \otimes \theta$ na $\xi \otimes (\eta \otimes \theta)$ jest unitarny. Korzystając z tego możemy utożsamić te przestrzenie i oznaczać obie symbolem $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$.

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta.
- Rozważmy odwzorowanie $\chi \in B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ takie, że

$$\chi(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

- χ jest operatorem unitarnym i $\chi^2 = \mathbb{1}$, a więc operator ten ma tylko dwie wartości własne $+1$ i -1 .
- Niech

$$\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H} = \{\Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \mid \chi \Xi = \Xi\} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H} = \{\Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \mid \chi \Xi = -\Xi\}$$

- $\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$ i $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H}$ są domkniętymi podprzestrzeniami $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Łatwo też zauważyć, że są ortogonalne (jeśli $\Xi \in \mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$ i $\Pi \in \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H}$, to $\langle \Xi | \Pi \rangle = \langle \chi \Xi | \chi \Pi \rangle = \langle \Xi | -\Pi \rangle = -\langle \Xi | \Pi \rangle$).

- Rzut ortogonalny na $\mathcal{H} \otimes_s \mathcal{H}$ nazywamy **symetryzatorem** i oznaczamy symbolem Sym , a rzut na $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{H}$ nazywamy **antysymetryzatorem** i oznaczamy Alt
- Mamy

$$\begin{cases} \text{Sym } \Xi = \frac{1}{2}(\Xi + \chi\Xi) \\ \text{Alt } \Xi = \frac{1}{2}(\Xi - \chi\Xi) \end{cases}, \quad \Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}.$$

- Operator χ definiuje działanie grupy S_2 na $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.
- Analogicznie definiujemy działanie grupy S_n na $\mathcal{H}^{\otimes n} = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n \text{ czynników}}$:

$$\pi \cdot (\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n) = \varphi_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi^{-1}(n)}, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}, \pi \in S_n$$

- Rozszerzamy pojęcie symetryzatora i antysymetryzatora:

$$\begin{cases} \text{Sym} \Xi = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \pi \cdot \Xi \\ \text{Alt} \Xi = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) \pi \cdot \Xi \end{cases}, \quad \Xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^{\otimes n}.$$

i definiujemy $\mathcal{H}^{\otimes_s n}$ oraz $\mathcal{H}^{\otimes_a n}$ jako obrazy rzutów Sym i Alt.

- Jest jasne, że działanie S_n na $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{s}} n}$ jest trywialne, a na $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{a}} n}$ każda $\pi \in S_n$ działa przez mnożenie przez skalar $\text{sgn}(\pi)$.
- Tak jak w przypadku $n = 2$, podprzestrzenie $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{s}} n}$ i $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{a}} n}$ są ortogonalne oraz mamy $\mathcal{H}^{\otimes_{\text{s}} n} \oplus \mathcal{H}^{\otimes_{\text{a}} n} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

PRZYKŁAD

Mamy naturalne utożsamienie $\underbrace{L_2(\mathbb{R}) \otimes \cdots \otimes L_2(\mathbb{R})}_{d \text{ razy}} \cong L_2(\mathbb{R}^d)$ przeprowadzające każdy tensor prosty $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_d$ na funkcję

$$\mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \mapsto \psi_1(\mathbf{x}_1) \cdots \psi_d(\mathbf{x}_d) \in \mathbb{C}.$$

Nietrudno się przekonać, że przy tym utożsamieniu podprzestrzeń $L_2(\mathbb{R})^{\otimes_{\text{s}} n}$ odpowiada przestrzeni tych $\Psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, dla których

$$\Psi(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(d)}) = \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

dla wszystkich $\pi \in S_d$ i prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Z kolei $L_2(\mathbb{R})^{\otimes_{\text{a}} n}$ staje się przestrzenią tych $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, które spełniają

$$\Phi(\mathbf{x}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\pi(d)}) = \text{sgn}(\pi) \Phi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$$

dla wszystkich $\pi \in S_d$ i prawie wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$.