

# METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 11

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Niech  $\mathcal{H}$  będzie przestrzenią Hilberta.
- **Pełną przestrzenią Focka** lub **algebrą tensorową nad  $\mathcal{H}$**  nazywamy przestrzeń

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

gdzie  $\mathcal{H}^{\otimes 0}$  utożsamiamy z przestrzenią jednowymiarową  $\mathbb{C}$ .

- Wektor  $1 \in \mathbb{C} = \mathcal{H}^{\otimes 0} \subset \Gamma(\mathcal{H})$  tradycyjnie oznacza się symbolem  $\Omega$ .
- Na każdym składniku prostym przestrzeni  $\Gamma(\mathcal{H})$  mamy działanie odpowiedniej grupy permutacji. W szczególności możemy na nich dokonać symetryzacji lub anty-symetryzacji.

- **Bozonową przestrzenią Focka** nazywamy przestrzeń

$$\Gamma_s(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes_s n}$$

(przy czym  $\mathcal{H}^{\otimes_s 0} = \mathbb{C}$ , a  $\mathcal{H}^{\otimes_s 1} = \mathcal{H}$ ).

- **Fermionową przestrzenią Focka** nazywamy przestrzeń

$$\Gamma_a(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes_a n}$$

(podobnie  $\mathcal{H}^{\otimes_a 0} = \mathbb{C}$ , a  $\mathcal{H}^{\otimes_a 1} = \mathcal{H}$ ).

- Niech  $T \in B(\mathcal{K}_1, \mathcal{H}_1)$  i  $S \in B(\mathcal{K}_2, \mathcal{H}_2)$ . Odwzorowanie

$$\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 \ni (\xi, \eta) \mapsto T\xi \otimes S\eta \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

jest dwuliniowe, a więc istnieje jedyne odwzorowanie liniowe

$T \otimes_{\text{alg}} S: \mathcal{K}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  takie, że

$$(T \otimes_{\text{alg}} S) \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \eta_i = \sum_{i=1}^n T\xi_i \otimes S\eta_i$$

dla wszystkich  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{K}_1$  i  $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{K}_2$ .

### STWIERDZENIE

Niech  $T \in B(\mathcal{K}_1, \mathcal{H}_1)$  i  $S \in B(\mathcal{K}_2, \mathcal{H}_2)$ . Wówczas operator  $T \otimes_{\text{alg}} S$  rozszerza się do  $T \otimes S: \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  o normie  $\|T\|\|S\|$ .

## DOWÓD

Na początek rozważmy przypadek  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{K}_2$  i  $S = \mathbb{1}$ . Jeśli  $\Psi \in \mathcal{K}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}_2$  i zapiszemy  $\Psi$  w postaci

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \xi_i \otimes \psi_i,$$

gdzie  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  są ortonormalne, to

$$\|(T \otimes_{\text{alg}} S)\Psi\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n T\xi_i \otimes \psi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|T\xi_i\|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 = \|T\|^2 \|\Psi\|^2.$$

Wynika stąd, że  $T \otimes_{\text{alg}} S = T \otimes_{\text{alg}} \mathbb{1}$  jest ograniczony, a jego norma nie przekracza  $\|T\|$ . W konsekwencji operator ten rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego operatora  $\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$  o normie nie większej niż  $\|T\|$ . Oznaczmy ten operator symbolem  $T \otimes \mathbb{1}$ .

## DOWÓD

Podobnie w przypadku  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H}_1$  i  $T = \mathbb{1}$  widzimy, że  $\mathbb{1} \otimes_{\text{alg}} S$  rozszerza się jednoznacznie do ograniczonego operatora  $\mathbb{1} \otimes S: \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_2$  spełniającego  $\|\mathbb{1} \otimes S\| \leq \|S\|$ .

W przypadku ogólnym zauważamy, że operator  $(\mathbb{1} \otimes S)(T \otimes \mathbb{1})$  obcięty do  $\mathcal{K}_1 \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}_2$  jest równy  $T \otimes_{\text{alg}} S$ , a więc operator ten rozszerza się do ograniczonego operatora  $(\mathbb{1} \otimes S)(T \otimes \mathbb{1}): \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ , który oznaczamy symbolem  $T \otimes S$ . Co więcej

$$\|T \otimes S\| = \|(\mathbb{1} \otimes S)(T \otimes \mathbb{1})\| \leq \|(\mathbb{1} \otimes S)\| \|T \otimes \mathbb{1}\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Teraz weźmy dowolny  $\varepsilon > 0$  i niech  $\xi \in \mathcal{K}_1$  oraz  $\eta \in \mathcal{K}_2$  będą takie, że  $\|T\xi\| > \|T\| - \varepsilon$  i  $\|S\eta\| > \|S\| - \varepsilon$ . Wówczas

$$\|(T \otimes S)(\xi \otimes \eta)\| = \|T\xi \otimes S\eta\| = \|T\xi\| \|S\eta\| > (\|T\| - \varepsilon)(\|S\| - \varepsilon) = \|T\| \|S\| - \varepsilon(\|T\| + \|S\|) + \varepsilon^2,$$

co pokazuje, że  $\|T \otimes S\| \geq \|T\| \|S\|$ . □

## DEFINICJA

Niech  $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$  i  $S \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2)$ . Operator  $T \otimes S$  skonstruowany w powyższym stwierdzeniu nazywamy **iloczynem tensorowym** operatorów  $T$  i  $S$ .

## CIEKAWOSTKA

Łatwo się przekonać, że jeśli  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , to każdy operator na  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  jest kombinacją liniową iloczynów tensorowych elementów  $B(\mathcal{H})$ .

Z kolei jeśli  $\dim \mathcal{H} = \infty$ , to nie każdy operator na  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$  jest granicą kombinacji liniowych operatorów postaci  $T \otimes S$ . Przykładowo operator  $\chi$  leży w odległości 1 od domkniętej powłoki liniowej operatorów postaci  $T \otimes S$ . Podobnie rzecz się ma z operatorem  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \ni \xi \otimes \eta \mapsto \eta \otimes \xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ , gdy przynajmniej jedna z przestrzeni  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{H}$  jest nieskończenie wymiarowa.

- Zależnie od kontekstu rozważać będziemy szeregi Fouriera

- funkcji okresowych na  $\mathbb{R}$  o okresie  $2\pi$ ,
- funkcji na  $[-\pi, \pi]$ ,
- funkcji na  $\mathbb{T}$ ,

gdzie jak zwykle  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

- Symbolem  $m$  będziemy oznaczać znormalizowaną miarę Lebesgue'a na  $\mathbb{T}$ :

$$\int_{\mathbb{T}} f \, dm = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \, dt.$$

- Przypomnijmy też notację:

$$\phi_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbb{T}, \, n \in \mathbb{Z}.$$

oraz

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi], \, n \in \mathbb{Z}.$$

- Mamy  $\phi_n = W\phi_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), gdzie  $W$  jest operatorem unitarnym  $L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2([-\pi, \pi])$  danym wzorem

$$(W\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(e^{it}), \quad \psi \in L_2(\mathbb{T}), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

- Współrzędne wektora  $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$  w bazie  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  nazywamy **współczynnikami Fouriera** funkcji  $\varphi$  i oznaczamy je w następujący sposób:

$$\widehat{\varphi}(n) = \langle \phi_n | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \varphi(z) \, dm(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Oznaczając symbolem  $\widehat{\varphi}$  kolekcję  $(\widehat{\varphi})_{n \in \mathbb{Z}}$  otrzymujemy odwzorowanie unitarne

$$L_2(\mathbb{T}) \ni \varphi \longmapsto \widehat{\varphi} \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

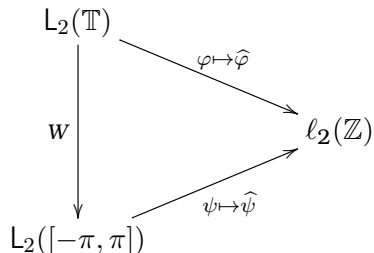
- Dla  $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$  mamy

$$\widehat{\psi}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \psi(t) \, dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Współczynniki Fouriera można zdefiniować nie tylko dla elementów  $L_2$  ale także dla funkcji z  $L_1$ .
- Poniższa tabelka podaje wzory na współczynniki Fouriera w różnych sytuacjach:

| Funkcja                       | Współczynnik Fouriera                                                                                                                   |
|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$ | $\widehat{\varphi}(n) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \varphi(z) \, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi(e^{it}) \, dt$ |
| $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$   | $\widehat{\psi}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \psi(t) \, dt$                                                    |
| $f \in L_1(\mathbb{T})$       | $\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} f(z) \, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(e^{it}) \, dt$                   |
| $g \in L_1([-\pi, \pi])$      | $\widehat{g}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} g(t) \, dt$                                                          |

- Jest jasne, że diagram



(którego wszystkie strzałki są operatorami unitarnymi) jest przemienny.

- Uwaga: na poziomie  $L_1$  analogiczny diagram nie jest przemienny.

- Niech  $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$ .
- Wtedy szereg  $\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) \phi_n$  jest zbieżny w normie  $\|\cdot\|_2$ .
- Przypomnijmy, że **jądro Dirichleta** jest to funkcja

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}x)} & x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{2N+1}{2\pi} & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

### STWIERDZENIE

Niech  $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$  i dla  $N \in \mathbb{N}$  oraz  $t \in [-\pi, \pi]$  zdefiniujmy  $s_N(\psi, t)$  wzorem

$$s_N(\psi, t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t - \theta) \psi(\theta) d\theta, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Wówczas przy  $N \rightarrow \infty$  funkcje  $t \mapsto s_N(\psi, t)$  zbiegają do  $\psi$  w  $L_2([-\pi, \pi])$ .

## DOWÓD

Funkcja  $t \mapsto s_N(\psi, t)$  jest rzutem  $\psi$  na podprzestrzeń  $\text{span}\{\phi_{-N}, \dots, \phi_N\}$ . Dalej zauważmy, że skoro szereg  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) \phi_n$  jest zbieżny w  $L_2$ , dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje skończony podzbiór  $I_\varepsilon \subset \mathbb{Z}$  taki, że

$$\left\| \psi - \sum_{n \in I_\varepsilon} \hat{\psi}(n) \phi_n \right\|_2 < \varepsilon.$$

Niech  $M_\varepsilon = \max\{|m| \mid m \in I_\varepsilon\}$ . Wtedy dla każdego  $N \geq M_\varepsilon$  mamy

$$\left\| \psi - \sum_{n=-N}^N \hat{\psi}(n) \phi_n \right\|_2^2 = \sum_{|n| > N} |\hat{\psi}(n)|^2 \leq \sum_{n \notin I_\varepsilon} |\hat{\psi}(n)|^2 = \left\| \psi - \sum_{n \in I_\varepsilon} \hat{\psi}(n) \phi_n \right\|_2^2 < \varepsilon^2.$$



## UWAGA

Wiemy, że ciąg sum częściowych

$$\left( \sum_{n=-N}^N \hat{\psi}(n) \phi_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

ma podciąg zbieżny punktowo prawie wszędzie. Jednak wzór

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) e^{int}$$

jest kłopotliwy, gdyż nie ma gwarancji, że szereg jest zbieżny dla wybranego  $t$ .

- Przypomnijmy niezmienniczość miary  $m$  względem przesunięć na  $\mathbb{T}$ :

$$\int_{\mathbb{T}} f(z\zeta) \, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z) \, dm(z).$$

- Niech  $f \in L_1(\mathbb{T})$ . Wówczas ciąg współczynników Fouriera  $\hat{f}$  jest ograniczony, bo

$$|\hat{f}(n)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(z)| \, dm(z) = \|f\|_1,$$

- W szczególności  $\hat{f} \in \ell_\infty(\mathbb{Z})$  i  $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ , czyli odwzorowanie  $f \mapsto \hat{f}$  jest ciągłym operatorem liniowym  $L_1(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z})$ .

### TWIERDZENIE (LEMAT RIEMANNA-LEBESGUE'A)

Niech  $f \in L_1(\mathbb{T})$ . Wtedy  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0$ .

## DOWÓD

Najpierw zauważmy, że jeśli  $f$  należy do  $L_2(\mathbb{T})$ , to ciąg  $\widehat{f}$  jest sumowalny z kwadratem, a więc oczywiście dąży do zera w  $\pm\infty$ . Ponadto przestrzeń  $L_2(\mathbb{T})$  jest gęsta w  $L_1(\mathbb{T})$ , gdyż zawiera  $C(\mathbb{T})$ , a ta podprzestrzeń jest gęsta w  $L_p(\mathbb{T})$  dla każdego  $p \in [1, +\infty[$ . Tak więc dla każdej  $f \in L_1(\mathbb{T})$  mamy  $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$ , gdzie

$f_m \in L_2(\mathbb{T})$ . Dalej  $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_1$ , a zatem

$\|\widehat{f_m} - \widehat{f}\|_\infty = \|\widehat{f_m - f}\|_\infty \leq \|f_m - f\|_1 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . W końcu przypomnijmy, że podprzestrzeń  $\ell_\infty(\mathbb{Z})$  złożona z ciągów zbieżnych do zera w  $\pm\infty$  jest domknięta i w konsekwencji  $\widehat{f}$  do niej należy. □

- Podprzestrzeń  $\ell_\infty(\mathbb{Z})$  złożona z ciągów zbieżnych do zera w  $\pm\infty$  oznaczamy symbolem  $c_0(\mathbb{Z})$ .
- $c_0(\mathbb{Z})$  jest przestrzenią Banacha z normą  $\|\cdot\|_\infty$ .

## STWIERDZENIE

Odwzorowanie  $f \mapsto \hat{f}$  jest ciągłym operatorem liniowym  $L_1(\mathbb{T}) \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  o normie 1.

## DOWÓD

Wiemy już, że operator  $f \mapsto \hat{f}$  ma normę nie większą niż 1. Biorąc za  $f$  funkcję stałą **1** (która ma normę 1 w  $L_1(\mathbb{T})$ ) widzimy, że ciąg  $\hat{f}$  ma normę 1 w  $c_0(\mathbb{Z})$ , co pokazuje, że operator  $f \mapsto \hat{f}$  ma normę równą dokładnie 1.  $\square$

## WNIOSEK

Odwzorowanie  $L_1([-\pi, \pi]) \ni g \mapsto \hat{g} \in c_0(\mathbb{Z})$  jest operatorem liniowym o normie  $\sqrt{2\pi}$ .