

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 12

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

LEMAT

Niech $f \in L_1([-\pi, \pi])$ będzie taka, że dla dowolnego podprzedziału $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ mamy $\int_a^b f(t) dt = 0$. Wówczas $f \doteq 0$.

UWAGA

Analogiczne stwierdzenie z $L_2([-\pi, \pi])$ w miejscu $L_1([-\pi, \pi])$ jest oczywiste w świetle tego, że $L_2([-\pi, \pi])$ ma bazę której elementami są kombinacje liniowe funkcji charakterystycznych przedziałów.

DOWÓD LEMATU

Jeśli funkcja f ma całkę zero po każdym $[a, b] \subset [\pi, \pi]$, to jest tak również dla $\bar{f}$. Oznacza to, że wystarczy udowodnić lemat dla funkcji f o wartościach rzeczywistych.

Położmy $E = \{t \in [-\pi, \pi] \mid f(t) \geq 0\}$. Jak każdy mierzalny podzbiór $[-\pi, \pi]$ zbiór E możemy zapisać w postaci $E = G \setminus N$, gdzie N jest miary zero, a G jest typu G_δ , tj. jest przecięciem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych:

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Z kolei każdy U_n jest co najwyżej przeliczalną sumą przedziałów otwartych:

$$U_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k^n, b_k^n[.$$

DOWÓD LEMATU

Wynika stąd, że dla każdego n

$$\int_{U_n} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[a_k^n, b_k^n]}(t) f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k^n}^{b_k^n} f(t) dt = 0$$

i w konsekwencji

$$\int_E f(t) dt = \int_G f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_G(t) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{U_n}(t) f(t) dt = 0$$

(bo $\mathbf{1}_{U_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_G f$ punktowo i dla wszystkich n mamy $|\mathbf{1}_{U_n} f| \leq |f|$).

Wykazaliśmy, że część dodatnia f jest równa zero prawie wszędzie. Analogicznie pokazujemy, że część ujemna f jest równa zero prawie wszędzie, a więc $f \doteq 0$. $\square$

TWIERDZENIE

Operator $L_1([-\pi, \pi]) \ni g \mapsto \hat{g} \in c_0(\mathbb{Z})$ jest injektywny.

DOWÓD

Weźmy dowolną $g \in L_1([-\pi, \pi])$ i połóżmy

$$G(x) = \int_{-\pi}^x g(t) dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Wtedy funkcja G jest ciągła, gdyż jeśli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do x w $[-\pi, \pi]$, to ciąg funkcji charakterystycznych $(\mathbf{1}_{[-\pi, x_n]})_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega punktowo do $\mathbf{1}_{[-\pi, x]}$, a więc $g\mathbf{1}_{[-\pi, x_n]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g\mathbf{1}_{[-\pi, x]}$ punktowo i możemy zastosować twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej.

DOWÓD

Ponadto dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\widehat{G}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} G(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \left(\int_{-\pi}^x g(t) dt \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_T e^{-inx} g(t) dt dx,$$

gdzie $T = \{(x, t) \mid -\pi \leq t \leq x \leq \pi\}$.

Zamieniając kolejność całkowania otrzymujemy

$$\widehat{G}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_t^{\pi} e^{-inx} g(t) dx dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_t^{\pi} e^{-inx} dx \right) g(t) dt.$$

DOWÓD

Dla $n \neq 0$ ostatni wzór daje

$$\widehat{G}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i}{n} ((-1)^n - e^{-int}) g(t) dt = \frac{i}{n} ((-1)^n \widehat{g}(0) - \widehat{g}(n)).$$

Przypuśćmy teraz, że $\widehat{g} = 0$. Wówczas wszystkie współczynniki Fouriera G oprócz $\widehat{G}(0)$ są równe zero. Funkcja G jest ciągła, a więc całkowalna z kwadratem, co pokazuje, że G jest stała (a nawet równa zero, bo $G(-\pi) = 0$). Tak więc dla dowolnego $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ mamy $\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a) = 0$. Na mocy lematu, $g = 0$ w $L_1([-\pi, \pi])$. □

WNIOSEK

Niech $g \in L_1([-\pi, \pi])$ będzie taka, że $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^2 < +\infty$. Wówczas $g \in L_2([-\pi, \pi])$.

DOWÓD

Mamy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc}
 L_1([-\pi, \pi]) & \xrightarrow{g \mapsto \widehat{g}} & c_0(\mathbb{Z}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 L_2([-\pi, \pi]) & \xrightarrow{\psi \mapsto \widehat{\psi}} & \ell_2(\mathbb{Z})
 \end{array}$$

w którym pionowe strzałki są naturalnymi włożeniami. Skoro dolna pozioma strzałka jest izomorfizmem, teza wynika natychmiast z injektywności górnej poziomej strzałki.



TWIERDZENIE

Niech $f, g \in L_1(\mathbb{T})$. Wtedy dla prawie każdego $z \in \mathbb{T}$ funkcja $\mathbb{T} \ni \zeta \mapsto f(z\zeta^{-1})g(\zeta)$ należy do $L_1(\mathbb{T})$, a funkcja

$$f * g: \mathbb{T} \ni z \mapsto \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})g(\zeta) \, dm(\zeta) \in \mathbb{C}$$

także należy do $L_1(\mathbb{T})$ przy czym $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

DOWÓD

Zdefiniujmy $H(z, \zeta) = |f(z\zeta^{-1})g(\zeta)|$. Wtedy H jest nieujemną funkcją mierzalną na $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ i dzięki niezmienniczości miary Lebesgue'a na $\mathbb{T}$ względem przesunięć otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} H(z, \zeta) \, dm(z) \right) dm(\zeta) = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Tak więc na mocy twierdzenia Fubiniego

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} H(z, \zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

Wynika stąd, że dla prawie wszystkich z funkcja $\zeta \mapsto f(z\zeta^{-1})g(\zeta)$ należy do $L_1(\mathbb{T})$ i w konsekwencji wielkość $(f * g)(z)$ jest dobrze zdefiniowana dla prawie wszystkich z . Co więcej $f * g \in L_1(\mathbb{T})$ i $\|f * g\|_1 \leq \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} H \, d(m \otimes m) = \|f\|_1 \|g\|_1$. $\square$

STWIERDZENIE

Operacja

$$L_1(\mathbb{T}) \times L_1(\mathbb{T}) \ni (f, g) \longmapsto f * g \in L_1(\mathbb{T})$$

jest przemienna, łączna i dwuliniowa.

DOWÓD

Przypomnijmy, że miara Lebesgue'a na $\mathbb{T}$ jest niezmiennicza względem operacji $\mathbb{T} \ni z \mapsto z^{-1} \in \mathbb{T}$, tj. jeśli $h \in L_1(\mathbb{T})$, to funkcja $z \mapsto h(z^{-1})$ także należy do $L_1(\mathbb{T})$ i

$$\int_{\mathbb{T}} h(z^{-1}) \, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} h(z) \, dm(z).$$

Teraz korzystając z tego oraz z niezmienniczości m na prawe przesunięcia i przemienności mnożenia w $\mathbb{T}$ obliczamy

$$\begin{aligned}(g * f)(z) &= \int_{\mathbb{T}} g(z\zeta^{-1})f(\zeta) \, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} g(z(\zeta z)^{-1})f(\zeta z) \, dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} g(\zeta^{-1})f(\zeta z) \, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} g(\zeta)f(z\zeta^{-1}) \, dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})g(\zeta) \, dm(\zeta) = (f * g)(z).\end{aligned}$$

DOWÓD

Dla dowodu łączności splotu skorzystamy z łączności mnożenia w $\mathbb{T}$, niezmienniczości m na przesunięcia i twierdzenia Fubiniiego: niech $f, g, h \in L_1(\mathbb{T})$. Wtedy

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(z) &= \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})(g * h)(\zeta) \, dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1}) \left(\int_{\mathbb{T}} g(\zeta\gamma^{-1})h(\gamma) \, dm(\gamma) \right) dm(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1})g(\zeta\gamma^{-1}) \, dm(\zeta) \right) h(\gamma) \, dm(\gamma) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z(\zeta\gamma)^{-1})g((\zeta\gamma)\gamma^{-1}) \, dm(\zeta) \right) h(\gamma) \, dm(\gamma) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z\gamma^{-1}\zeta^{-1})g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) h(\gamma) \, dm(\gamma) = \int_{\mathbb{T}} (f * g)(z\gamma^{-1})h(\gamma) \, dm(\gamma) = ((f * g) * h)(z). \end{aligned}$$

W końcu dwuliniowość $f * g$ względem f i g jest jasna z definicji splotu. □

TWIERDZENIE

Dla $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ i dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ mamy $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.

DOWÓD

Ponownie korzystamy z niezmienniczości miary Lebesgue'a na przesunięcia i twierdzenia Fubiniego:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f * g}(n) &= \int_{\mathbb{T}} z^{-n} (f * g)(z) \, dm(z) = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \left(\int_{\mathbb{T}} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} z^{-n} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} (z\zeta^{-1})^{-n} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) dm(z) \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} (z\zeta^{-1})^{-n} f(z\zeta^{-1}) g(\zeta) \, dm(z) \right) dm(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} (z\zeta^{-1})^{-n} f(z\zeta^{-1}) \, dm(z) \right) \zeta^{-n} g(\zeta) \, dm(\zeta) \\
 &= \left(\int_{\mathbb{T}} (z)^{-n} f(z) \, dm(z) \right) \left(\int_{\mathbb{T}} \zeta^{-n} g(\zeta) \, dm(\zeta) \right) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).
 \end{aligned}$$

□

- **Algebrą Banacha** nazywamy przestrzeń Banacha $(A, \|\cdot\|)$ wyposażona w dwuliniowe łączne mnożenie $(a, b) \mapsto ab$ takie, że

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad a, b \in A.$$

Powyżej pokazaliśmy, że operacja splotu definiuje na $L_1(\mathbb{T})$ strukturę przemiennej algebry Banacha. Zauważmy, że algebra ta nie ma jedynki.

- Przestrzeń $c_0(\mathbb{Z})$ także jest przemianą algebrą Banacha względem operacji punktowego mnożenia ciągów.
- Ostatnie twierdzenie mówi, że

$$L_1(\mathbb{T}) \ni f \longmapsto \hat{f} \in c_0(\mathbb{Z})$$

jest **homomorfizmem algebr Banacha**.

- Przypomnijmy wyrażenie na jądro Dirichleta:

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}x)} & x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{2N+1}{2\pi} & x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

STWIERDZENIE

Mamy $\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$.

DOWÓD

Skoro $\sin x \leq x$ dla $x \geq 0$, mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau = 2 \int_0^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\tau)}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \right| \, d\tau \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\tau)}{\tau} \right| \, d\tau.$$

Teraz dzielimy $[0, \pi]$ na $2N + 1$ przedziałów $[\frac{n\pi}{2N+1}, \frac{(n+1)\pi}{2N+1}]$ ($n = 0, \dots, 2N$). Na każdym takim przedziale czynnik $\frac{1}{\tau}$ jest większy niż $\frac{2N+1}{(n+1)\pi}$, a więc

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{2N} \int_{\frac{n\pi}{2N+1}}^{\frac{(n+1)\pi}{2N+1}} \frac{|\sin((N + \frac{1}{2})\tau)|}{\tau} \, d\tau \geq \frac{2(2N+1)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1} \int_{\frac{n\pi}{2N+1}}^{\frac{(n+1)\pi}{2N+1}} |\sin((N + \frac{1}{2})\tau)| \, d\tau.$$

DOWÓD

Dalej zauważmy, że

$$\int_{\frac{n\pi}{2N+1}}^{\frac{(n+1)\pi}{2N+1}} \left| \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\tau\right) \right| d\tau = \int_0^{\frac{\pi}{2N+1}} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau,$$

a stąd

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| d\tau &\geq \frac{2(2N+1)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2N+1}} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau \\ &= \frac{2(2N+1)}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1} \left(N + \frac{1}{2}\right)^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

która to wielkość dąży do $+\infty$ gdy $N \rightarrow \infty$.

□

LEMAT

Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ istnieje $f_N \in C([-\pi, \pi])$ taka, że $f_N(-\pi) = f_N(\pi)$, $\|f_N\|_\infty = 1$ i

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) f_N(\tau) \, d\tau > \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau.$$

DOWÓD

Podzielmy przedział $[-\pi, \pi]$ na podprzedziały, na których D_N ma stały znak:

$$[-\pi, \pi] = \left[-\pi, -\frac{N\pi}{N+\frac{1}{2}} \right] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{N-1} \left[-\frac{N(n+1)\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}} \right] \right) \cup \left[-\frac{\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{N+\frac{1}{2}} \right] \\ \cup \left(\bigcup_{n=1}^{N-1} \left[\frac{n\pi}{N+\frac{1}{2}}, \frac{(n+1)\pi}{N+\frac{1}{2}} \right] \right) \cup \left[\frac{N\pi}{N+\frac{1}{2}}, \pi \right]$$

Następnie ustalmy $\varepsilon \in]0, \frac{\pi}{2N+1}[$ i rozważmy funkcję g_ε zdefiniowaną oddzielnie dla każdego $[a, b]$ z powyższej sumy:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(D_N\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\varepsilon^{-1}(x-a) & x \in [a, a+\varepsilon[\\ \operatorname{sgn}\left(D_N\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) & x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \\ \operatorname{sgn}\left(D_N\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\varepsilon^{-1}(b-x) & x \in]b-\varepsilon, b] \end{cases}$$

DOWÓD

Funkcja g_ε jest ciągła i spełnia $\|g_\varepsilon\|_\infty = 1$ oraz $g_\varepsilon(-\pi) = g_\varepsilon(\pi) = 0$. Ponadto na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) g_\varepsilon(\tau) \, d\tau \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau.$$

Definiujemy f_N jako taką funkcję g_ε , dla której

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) g_\varepsilon(\tau) \, d\tau > \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau.$$



TWIERDZENIE

Istnieje funkcja $f \in C([-\pi, \pi])$ taka, że $f(-\pi) = f(\pi)$, dla której ciąg $(s_N(f, 0))_{N \in \mathbb{N}}$ jest rozbieżny.

DOWÓD

Niech X będzie podprzestrzenią $C([-\pi, \pi])$ składającą się z funkcji o równych wartościach na końcach przedziału. Jest jasne, że X jest domkniętą podprzestrzenią $C([-\pi, \pi])$, a więc X jest przestrzenią Banacha. Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ niech Θ_N będzie funkcjonałem

$$X \ni g \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau) g(\tau) \, d\tau \in \mathbb{C}.$$

Jest jasne, że Θ_N jest ciągły: $|\Theta_N(g)| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau \right) \|g\|_{\infty}$ ($g \in X$) i mamy $\Theta_N(g) = s_N(g, 0)$ dla każdej funkcji $g \in X$ i każdego $N \in \mathbb{N}$.

DOWÓD

Jeśli dla każdej $f \in X$ ciąg $(s_N(f, 0))_{N \in \mathbb{N}}$ byłby zbieżny, to – w szczególności – rodzina funkcjonałów $\{\Theta_n\}_{N \in \mathbb{N}}$ miałaby tę własność, że zbiór

$$\{\Theta_N(f) \mid N \in \mathbb{N}\}$$

byłby ograniczony dla każdej $f \in X$. Wówczas na mocy twierdzenia Banacha-Steinhausa istniałaby stała $C > 0$ taka, że $\|\Theta_N\| \leq C$ dla wszystkich N . Jednak udowodniony wcześniej lemat mówi, że

$$\|\Theta_N\| \geq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(\tau)| \, d\tau \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty.$$



TWIERDZENIE CARLESONA-HUNTA

Niech $p \in]1, +\infty]$ i niech $f \in L_p([-\pi, \pi])$. Wówczas

$$s_N(f, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t)$$

dla prawie wszystkich $t \in [-\pi, \pi]$.

UWAGA

Dla $p = 2$ stosunkowo łatwo uzyskaliśmy wynik, że powyższa zbieżność zachodzi dla pewnego podciągu ciągu $(\sigma_N(f, \cdot))_{N \in \mathbb{N}}$.

- Dla $f \in L_1([-\pi, \pi])$ mamy $s_N(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$.
- Połóżmy $\sigma_N(f, t) = \frac{1}{N+1} (s_0(f, t) + \dots + s_N(f, t))$.
- Jeśli dla danego $t \in [-\pi, \pi]$ istnieje $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f, t)$, to oczywiście istnieje też $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f, t)$ i granice te są sobie równe.
- Mamy

$$\sigma_N(f, t) = \frac{1}{N+1} \sum_{K=0}^N s_K(f, t) = \frac{1}{N+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{K=0}^N \sum_{n=-K}^K \hat{f}(n) e^{int}$$

(w podwójnej sumie po prawej stronie wyraz $\hat{f}(0)e^{i0t}$ pojawia się $N+1$ razy, wyrazy $\hat{f}(1)e^{i1t}$ i $\hat{f}(-1)e^{i(-1)t}$ występują N razy itd. aż do $\hat{f}(N)e^{iNt}$ oraz $\hat{f}(-N)e^{i(-N)t}$, które pojawiają się tylko raz).

- Stąd

$$\sigma_N(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} \widehat{f}(n) e^{int}$$

i w konsekwencji

$$\sigma_N(f, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau e^{int} = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Funkcję K_N nazywamy **jądrem Fejéra**.

LEMAT

Dla $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ mamy

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} \right)^2,$$

natomiast $K_N(x) = \frac{N+1}{2\pi}$ dla $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

DOWÓD

Rozważmy wyrażenie $\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2$. Mamy

$$\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2 = \sum_{m,n=0}^N e^{i(m+n-N)x} = e^{-iNx} \sum_{m,n=0}^N e^{i(m+n)x}.$$

Teraz pogrupujemy wyrazy, w których $m+n=k$ i zsumujemy po k . Wielkość $m+n$ ma wartości od 0 do $2N$ i każde $k=m+n$ występuje $N+1-|k-N|$ razy. Stąd

$$\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2 = e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} (N+1-|k-N|) e^{ikx} = \sum_{k=0}^{2N} (N+1-|k-N|) e^{i(k-N)x}.$$

Wreszcie zamieniając sumowanie po $k \in \{0, \dots, 2N\}$ na sumowanie po $n = k-N \in \{-N, \dots, N\}$ otrzymujemy

$$\left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x}\right)^2 = \sum_{n=-N}^N (N+1-|n|) e^{inx}.$$

DOWÓD

W świetle wzoru $K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} e^{inx}$ dostajemy

$$\begin{aligned} K_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\sum_{n=0}^N e^{i(n-\frac{N}{2})x} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(e^{-i\frac{N}{2}x} \sum_{n=0}^N (e^{ix})^n \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(e^{-i\frac{N}{2}x} \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{e^{-i\frac{N}{2}x} - e^{i(\frac{N}{2}+1)x}}{1 - e^{ix}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{e^{-i\frac{N+1}{2}x} - e^{i\frac{N+1}{2}x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2 \end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Wartość $K_N(x)$ dla $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ obliczamy bezpośrednio ze wzoru $K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} e^{inx}$. □

- $K_N \geq 0$.
- K_N jest funkcją parzystą (w szczególności K_N definiuje funkcję na $\mathbb{T}$).

STWIERDZENIE

- ① $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\tau) d\tau = 1$ dla wszystkich N ,
- ② dla dowolnej $\delta > 0$ ciąg $(K_N)_{N \in \mathbb{N}}$ dąży jednostajnie do 0 na $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$.

DOWÓD

Ad ❶ Mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{N+1-|n|}{N+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\tau} d\tau = 1$$

(niezerowa jest tylko całka dla $n = 0$, inny dowód: $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(\tau) d\tau = \sigma_N(\mathbf{1}, 0) = 1$).

Ad ❷ Dla $x \in [-\pi, \pi]$ takiego, że $|x| \geq \delta$ mamy $(\sin(\frac{1}{2}x))^2 \geq (\sin(\frac{1}{2}\delta))^2$. Stąd

$$K_N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\delta)} \right)^2.$$

Wynika stąd, że $K_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ jednostajnie na $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. □

TWIERDZENIE FEJÉRA

Niech $f \in C([-\pi, \pi])$ spełnia $f(-\pi) = f(\pi)$. Wówczas aproksymacje $t \mapsto \sigma_N(f, t)$ zbiegają do f jednostajnie, gdy $N \rightarrow \infty$.

DOWÓD

Skoro f jest ciągła i $f(-\pi) = f(\pi)$, możemy ją rozszerzyć do okresowej funkcji $\tilde{f}$ na $\mathbb{R}$. Zauważmy, że funkcja $\tilde{f}$ jest jednostajnie ciągła.

Wiemy, że $\sigma_N(f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(\tau) d\tau$, a więc dla każdego $N \in \mathbb{N}$ i $t \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f, t) - f(t)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(\tau) d\tau - f(t) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(\tau) d\tau - \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)f(t) d\tau \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)(f(\tau) - f(t)) d\tau \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)|f(\tau) - f(t)| d\tau \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t - \tau)|\tilde{f}(\tau) - \tilde{f}(t)| d\tau = \int_{t-\pi}^{t+\pi} K_N(s)|\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| ds. \end{aligned}$$

DOWÓD

Funkcja pod ostatnią całką jest okresowa, więc możemy przesunąć przedział całkowania nie zmieniając wartości całki. Stąd

$$|\sigma_N(f, t) - f(t)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds.$$

Dalej dla $\delta \in]0, \pi[$ możemy przepisać prawą stronę ostatniego równania w następujący sposób:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds + \int_{\delta}^{\pi} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds + \int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds.$$

Nietrudno się przekonać, że każdy z pierwszych dwóch wyrazów powyższej sumy jest mniejszy niż $2\pi \|f\|_{\infty} \max_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_N(s)$.

DOWÓD

Wreszcie całkę $\int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds$ możemy oszacować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) |\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)| \, ds &\leq \max_{|x-y| \leq \delta} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \int_{-\delta}^{\delta} K_N(s) \, ds \\ &\leq \max_{|x-y| \leq \delta} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \int_{-\pi}^{\pi} K_N(s) \, ds = \max_{|x-y| \leq \delta} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \end{aligned}$$

(w ostatnim kroku ponownie skorzystaliśmy z faktu, że $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(s) \, ds = 1$).

Ponieważ $\tilde{f}$ jest jednostajnie ciągła, dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta_\varepsilon \in]0, \pi[$ taka, że

$$\max_{|x-y| \leq \delta_\varepsilon} |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

DOWÓD

W szczególności dla tak dobranej δ_ε mamy

$$|\sigma_N(f, t) - f(t)| \leq 4\pi \|f\|_\infty \max_{\delta_\varepsilon \leq |s| \leq \pi} K_N(s) + \frac{\varepsilon}{2}$$

A stąd

$$|\sigma_N(f, t) - f(t)| < \varepsilon$$

dla dostatecznie dużych N .



UWAGA

Powyższy dowód pokazuje, że jeśli f jest ograniczona i ciągła w punkcie $t \in]-\pi, \pi[$, to $\sigma_N(f, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t)$. Podobnie jest dla $t = \pm\pi$, jeśli $f(-\pi) = f(\pi)$.