

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 13

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

STWIERDZENIE

Niech $\psi \in L_2([-\pi, \pi])$ będzie taka, że ciąg $(\hat{\psi}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ jest sumowalny. Wówczas ψ jest ciągła i szereg

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) e^{int}$$

jest zbieżny jednostajnie do ψ na $[-\pi, \pi]$.

DOWÓD

Wiemy, że

$$\sum_{n=-N}^N \hat{\psi}(n) \phi_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \psi$$

w $L_2([-\pi, \pi])$, a więc istnieje ściśle rosnąca funkcja $\mathbb{N} \ni k \mapsto N_k \in \mathbb{N}$ taka, że

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N_k}^{N_k} \hat{\psi}(n) e^{int} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \psi(t)$$

dla prawie wszystkich t . Z drugiej strony szereg $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(n) e^{int}$ jest zbieżny jednostajnie na mocy kryterium Weierstrassa. □

TWIERDZENIE

Niech f będzie ocięciem do $[-\pi, \pi]$ funkcji okresowej na $\mathbb{R}$ klasy C^1 . Wówczas ciąg $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ jest sumowalny.

DOWÓD

Całkując przez części i pamiętając, że f jest okresowa (o okresie 2π) obliczamy

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f'(t) dt = \frac{in}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt = in \hat{f}(n).$$

Stąd $(n\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ jest ciągiem współczynników Fouriera ciągłej (a więc całkowalnej z kwadratem) funkcji $-if'$. W szczególności współczynniki te są sumowalne z kwadratem, a więc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n} |n\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |n\hat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$



TWIERDZENIE DINI'EGO

Niech f będzie funkcją całkowalną na $[-\pi, \pi]$, $t \in]-\pi, \pi[$ oraz $a \in \mathbb{C}$. Jeśli istnieje $\theta \in]0, \pi[$ taka, że

$$\int_0^\theta \left| \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2a}{\tau} \right| d\tau < +\infty$$

(jeśli argument wypada poza $[-\pi, \pi]$, to rozszerzamy f periodycznie). Wówczas

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f, t) = a.$$

DOWÓD

Rozszerzamy f do funkcji okresowej na $\mathbb{R}$. Mamy

$$s_N(f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_{t-\pi}^{t+\pi} D_N(u) f(t - u) du.$$

Dzięki okresowości f i D_N możemy przsunąć przedział całkowania otrzymując

$$\begin{aligned} s_N(f, t) &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(s) f(t - s) ds = \int_{-\pi}^0 D_N(s) f(t - s) ds + \int_0^{\pi} D_N(s) f(t - s) ds \\ &= \int_0^{\pi} D_N(s') f(t + s') ds' + \int_0^{\pi} D_N(s) f(t - s) ds = \int_0^{\pi} D_N(\tau) (f(t + \tau) ds + f(t - \tau)) d\tau \end{aligned}$$

(funkcja D_N jest parzysta).

DOWÓD

Stąd

$$\begin{aligned}
s_N(f, t) - a &= \int_0^\pi D_N(\tau) (f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau)) \, d\tau - 2a \int_0^\pi D_N(\tau) \, d\tau = \int_0^\pi D_N(\tau) (f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a) \, d\tau \\
&= \int_0^\pi \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\tau)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}\tau)} (f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a) \, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin((N + \frac{1}{2})\tau) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \frac{f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a}{\tau} \, d\tau \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(N\tau) \cos(\frac{1}{2}\tau) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \frac{f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a}{\tau} \, d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(N\tau) \sin(\frac{1}{2}\tau) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin(\frac{1}{2}\tau)} \frac{f(t + \tau) \, ds + f(t - \tau) - 2a}{\tau} \, d\tau.
\end{aligned}$$

Nasze założenie gwarantuje, że funkcja $\tau \mapsto \frac{f(t+\tau) \, ds + f(t-\tau) - 2a}{\tau} \, d\tau$ jest całkowalna na przedziale $[0, \theta]$, a skoro jest ewidentnie całkowalna na $[\theta, \pi]$, jest ona również całkowalna na $[0, \pi]$.

DOWÓD

Wynika stąd, że funkcje

$$g_1(\tau) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin\left(\frac{1}{2}\tau\right)} \frac{f(t+\tau) \, ds + f(t-\tau) - 2a}{\tau} & \tau \in]0, \pi] \\ 0 & \tau \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

oraz

$$g_2(\tau) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{2}\tau\right) \frac{\frac{1}{2}\tau}{\sin\left(\frac{1}{2}\tau\right)} \frac{f(t+\tau) \, ds + f(t-\tau) - 2a}{\tau} & \tau \in]0, \pi] \\ 0 & \tau \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

należą do $L_1([-\pi, \pi])$.

DOWÓD

Dlatego, na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a, mamy

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(N\tau) g_1(\tau) d\tau = -i\sqrt{2\pi}(\widehat{g_1}(-N) - \widehat{g_1}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

i

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(N\tau) g_1(\tau) d\tau = \sqrt{2\pi}(\widehat{g_1}(-N) + \widehat{g_1}(N)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

a w konsekwencji $s_N(f, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a$.



- Niech f będzie funkcją na przedziale zawierającym punkt x_0 .
- Powiemy, że f jest **hölderowsko ciągła** w x_0 z **wykładnikiem Höldera** $\alpha > 0$, jeśli istnieje $C > 0$ takie, że

$$|f(x_0 + y) - f(x_0)| \leq C|y|^\alpha$$

dla dostatecznie małych y .

TWIERDZENIE LIPSCHITZA-HÖLDERA

Niech f będzie funkcją całkowalną na $[-\pi, \pi]$. Załóżmy, że f jest hölderowsko ciągła w punkcie $t_0 \in]-\pi, \pi[$. Wówczas $s_N(f, t_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(t_0)$.

DOWÓD

Stosujemy twierdzenie Dini'ego z $t = t_0$ and $a = f(t_0)$. Dla $\tau \in]0, \pi]$ mamy

$$\left| \frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)-2f(t_0)}{\tau} \right| \leq \left| \frac{f(t_0+\tau)-f(t_0)}{\tau} \right| + \left| \frac{f(t_0-\tau)-f(t_0)}{\tau} \right| \leq \frac{2C}{\tau^{1-\alpha}},$$

gdzie C i α są stałą i wykładnikiem z definicji hölderowskiej ciągłości f w t_0 . W końcu dla dowolnego $\sigma > 0$ mamy

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}} < +\infty$$

bo $\alpha > 0$. □

- Dla $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ definiujemy

$$\hat{f}(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x) \, dx,$$

gdzie $p \cdot x = \sum_{i=1}^d x^i p^i$.

- Łatwo sprawdzamy, że $\hat{f}$ jest funkcją ograniczoną:

$$|\hat{f}(p)| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx = \|f\|_1,$$

a więc $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

- Z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej łatwo wynika też, że $\hat{f}$ jest funkcją ciągłą, a więc $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym operatorem $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^d)$.

PRZYKŁADY

- ❶ Dla $H(x) = e^{-(|x_1|+\dots+|x_d|)}$ mamy

$$\hat{H}(p) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+p_j^2}, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

- ❷ Niech A będzie dodatnią macierzą $d \times d$ o zerowym jądrze (czyli taką, że $x \mapsto x \cdot Ax$ jest ściśle dodatnią formą kwadratową) i niech $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x \cdot Ax}$. Wtedy

$$\hat{f}(p) = (\det A)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}p \cdot A^{-1}p}, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

PRZYKŁADY

❸ Dla ustalonego $s > 0$ zdefiniujemy

$$G_s(x) = \frac{1}{2^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r}{2} - \frac{\|x\|^2}{2r}} r^{-\frac{d-s+2}{2}} dr, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

gdzie $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{\frac{s}{2}-1} dr$. Wówczas G_s jest całkowalna ($\|G_s\|_1 = (2\pi)^{\frac{d}{2}}$) i

$$\widehat{G_s}(p) = (1 + \|p\|^2)^{-\frac{s}{2}}, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

- Dla $y \in \mathbb{R}^d$ zdefiniowaliśmy operator translacji τ_y kładąc

$$(\tau_y f)(x) = f(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Mamy też operator ϵ_y dany wzorem

$$(\epsilon_y f)(x) = e^{ix \cdot y} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- Wreszcie operator skalowania S_a ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) zdefiniowany jest w następujący sposób:

$$(S_a f)(x) = f(ax), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

STWIERDZENIE

Niech $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Wtedy

- 1 dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^d$ mamy $\widehat{\tau_y f} = \epsilon_{-y} \hat{f}$,
- 2 dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^d$ mamy $\widehat{\epsilon_y f} = \tau_y \hat{f}$,
- 3 dla dowolnego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy $\widehat{S_a f} = |a|^{-d} S_{a^{-1}} \hat{f}$.

TWIERDZENIE

Niech $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Wtedy $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \hat{f} \hat{g}$.

DOWÓD

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \widehat{f * g}(p) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} (f * g)(x) dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\
 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x-y) g(y) dy \right) dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x-y) g(y) dx \right) dy \\
 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} f(x-y) dx \right) g(y) dy = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot (x-y)} f(x-y) dx \right) e^{-ip \cdot y} g(y) dy \\
 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot z} f(z) dz \right) e^{-ip \cdot y} g(y) dy = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot z} f(z) dz \right) e^{-ip \cdot y} g(y) dy \\
 &= \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot z} f(z) dz \right) \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot y} g(y) dy \right) = \hat{f}(p) \hat{g}(p).
 \end{aligned}$$



- **Przestrzenia Schwartza** nazywamy przestrzeń tych $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, które spełniają

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\mathbf{x}^\alpha (\partial^\beta f)(\mathbf{x})| < +\infty$$

dla wszystkich wielowskaźników $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$. Oznaczamy ją symbolem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

- Przestrzeń Schwarza jest wyposażona w rodzinę norm $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^d}$

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \|\mathbf{x}^\alpha \partial^\beta f\|_\infty = \|\mathbf{x}^\alpha D^\beta f\|_\infty,$$

gdzie $D^\beta = (-i)^{|\beta|} \partial^\beta$.

- Powiemy, że $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, jeśli dla każdego $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ mamy $\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
- Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy $D^\alpha f, \mathbf{x}^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ponadto odwzorowania $f \mapsto D^\alpha f$ oraz $f \mapsto \mathbf{x}^\beta f$ są ciągłe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

TWIERDZENIE

Dla każdego $p \in [1, +\infty]$ mamy $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_p(\mathbb{R}^d)$. Włózenie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_p(\mathbb{R}^d)$ jest ciągłe, a dla $p < +\infty$ ma gęsty obraz.

DOWÓD

Przypadek $p = +\infty$ jest oczywisty. Rozważmy przypadek $p = 1$. Wybierzmy N tak duże, że

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^{-N} dx < +\infty.$$

Wtedy dla każdej $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^{-N} (1 + \|x\|^2)^N |f(x)| dx \leq C_N \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^N |f(x)| \right),$$

gdzie $C_N = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^{-N} dx$.

DOWÓD

Ponadto supremum po x wyrażenia

$$\begin{aligned}
 (1 + \|x\|^2)^N |f(x)| &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \|x\|^{2k} |f(x)| = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (x_1^2 + \dots + x_d^2)^k |f(x)| \\
 &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \sum_{\substack{\lambda_1 + \dots + \lambda_d = k \\ \lambda_1, \dots, \lambda_d \geq 0}} \frac{k!}{\lambda_1! \dots \lambda_d!} |x_1|^{2\lambda_1} \dots |x_d|^{2\lambda_d} |f(x)| \\
 &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d \\ |\lambda| = k}} \frac{k!}{\lambda_1! \dots \lambda_d!} |(\mathbf{x}^{2\lambda} f)(x)|,
 \end{aligned}$$

majoryzuje się kombinacją liniową norm $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$. Wynika stąd po pierwsze, że $\|f\|_1 < +\infty$, a po drugie, że włożenie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_1(\mathbb{R}^d)$ jest ciągłe.

DOWÓD

W przypadku $p \in]1, +\infty[$ zauważamy, że

$$\|f\|_p = \left\| |f|^{\frac{1}{p}} |f|^{1-\frac{1}{p}} \right\|_p \leq \| |f|^{1-\frac{1}{p}} \|_{\infty} \| |f|^{\frac{1}{p}} \|_p = (\|f\|_{\infty})^{1-\frac{1}{p}} (\|f\|_1)^{\frac{1}{p}},$$

a stąd $\|f\|_p < +\infty$ dla wszystkich $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i jeśli $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ w $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, to mamy $\|f_n\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

W końcu fakt, że $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jest gęstą podprzestrzenią w $L_p(\mathbb{R}^d)$ dla wszystkich $p \in]1, +\infty[$ wynika natychmiast z tego, że $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

TWIERDZENIE

Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Wtedy

- ❶ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ mamy $\widehat{D^\alpha f} = \mathbf{x}^\alpha \widehat{f}$,
- ❷ dla dowolnego $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ mamy $D^\beta \widehat{f} = (-1)^{|\beta|} \widehat{\mathbf{x}^\beta f}$.

WNIOSEK

Transformacja Fouriera $f \mapsto \widehat{f}$ jest topologicznym izomorfizmem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
Odwzorowanie odwrotne $g \mapsto \check{g}$ dane jest wzorem

$$\check{g}(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ip \cdot x} g(p) \, dp, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

PRZYKŁAD

Rozważmy funkcję gaussowską

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Oznaczając $g = \hat{f}$ mamy

$$g' = iD\hat{f} = -i\widehat{xf} = i\widehat{f'} = -\widehat{Df} = -\widehat{xf} = -xg.$$

Rozwiązujemy powyższe równanie różniczkowe i otrzymujemy

$$g(p) = C \exp\left(-\int_0^p x \, dx\right) = Ce^{-\frac{p^2}{2}}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Wreszcie } C = g(0) = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1.$$

TWIERDZENIE (LEMAT RIEMANNA-LEBESGUE'A)

Dla dowolnej $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mamy $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

- Odwzorowanie $f \mapsto \hat{f}$ jest ciągłym operatorem $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R}^d)$,
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ jest gęstą podprzestrzenią $L_1(\mathbb{R}^d)$,
- dla $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mamy $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d)$,
- $C_0(\mathbb{R}^d)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

