

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 14

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Niech h będzie nieujemną funkcją mierzalną na $\mathbb{R}^d$ taką, że $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = 1$.
- Dla $\varepsilon > 0$ połóżmy

$$h_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

LEMAT

Niech $k \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ będzie ciągłą w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Wtedy $(h_\varepsilon * k)(x_0) \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} k(x_0)$.

DOWÓD

Mamy

$$\begin{aligned}
|(h_\varepsilon * k)(x_0) - k(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(x_0 - y)k(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z)k(x_0) \, dz \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z)k(x_0 - z) \, dz - \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z)k(x_0) \, dz \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} h_\varepsilon(z) |k(x_0 - z) - k(x_0)| \, dz = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d} h\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \left| k(x_0 - \varepsilon \frac{z}{\varepsilon}) - k(x_0) \right| \, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h(s) |k(x_0 - \varepsilon s) - k(x_0)| \, ds.
\end{aligned}$$

Funkcje $s \mapsto h(s) |k(x_0 - \varepsilon s) - k(x_0)|$ zbiegają punktowo do 0 ponieważ k jest ciągła w x_0 i wszystkie są ograniczone przez $2\|k\|_\infty h$. Stąd na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej

$$|(h_\varepsilon * k)(x_0) - k(x_0)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} h(s) |k(x_0 - \varepsilon s) - k(x_0)| \, ds \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} 0.$$



- Tak samo jak wykazaliśmy, że dla dowolnego $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ funkcja

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \tau_y \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$$

jest ciągła, można wykazać, że dla dowolnego $p \in [1, +\infty[$ i dowolnej $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ funkcja

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \tau_y f \in L_p(\mathbb{R}^d)$$

jest ciągła.

WNIOSEK

Niech $p \in [1, +\infty[$ i $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ wówczas funkcja

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \|\tau_y f - f\|_p^p \in [0, +\infty[$$

jest ciągła i ograniczona.

TWIERDZENIE

Dla dowolnej $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mamy

$$h_\epsilon * f \xrightarrow[\epsilon \searrow 0]{} f$$

w $L_1(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Rachując podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, dla prawie każdego x mamy

$$\begin{aligned} |(h_\epsilon * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(x-y)f(y) \, dy - \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) \, dz f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z)f(x-z) \, dz - \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z)f(x) \, dz \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z)(f(x-z) - f(x)) \, dz \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z)|f(x-z) - f(x)| \, dz. \end{aligned}$$

DOWÓD

Teraz całkujemy obie strony otrzymanej nierówności po x :

$$\begin{aligned}\|h_\epsilon * f - f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon(z) \|\tau_z f - f\|_1 \, dz = \int_{\mathbb{R}^d} \|f - \tau_{-z} f\|_1 h_\epsilon(z) \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} k(0 - z) h_\epsilon(z) \, dz = (k * h_\epsilon)(0) = (h_\epsilon * k)(0),\end{aligned}$$

gdzie $k(z) = \|\tau_z f - f\|_1$ ($z \in \mathbb{R}^d$). Funkcja k jest ciągła i ograniczona, a więc

$$(h_\epsilon * k)(0) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} k(0) = 0$$

na mocy lematu. □

TWIERDZENIE

Niech $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ będzie taka, że $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ i połóżmy

$$g(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} \hat{f}(p) \, dp, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Wówczas $g \doteq f$.

DOWÓD

Rozważmy funkcję

$$H(p) = e^{-(|p_1| + \dots + |p_d|)}, \quad p \in \mathbb{R}^d$$

i dla $\varepsilon > 0$ niech

$$g_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(\varepsilon p) \hat{f}(p) dp, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Ponieważ H jest ciągła, ograniczona i spełnia $H(0) = 1$, a $\hat{f}$ jest całkowalna, na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^d$ mamy $g(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} g_\varepsilon(x)$.

Dalej zdefiniujemy funkcję h kładąc

$$h(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(p) dp, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(tj. $h = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} S_{-1} \hat{H}$).

DOWÓD

Mamy $h(x) = \pi^{-d} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+x_j^2}$ i w konsekwencji

$$\int_{\mathbb{R}^d} h(x) dx = \pi^{-d} \prod_{j=1}^d \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_j}{1+x_j^2} = \pi^{-d} \prod_{j=1}^d \arctan(x_j) \Big|_{x_j=-\infty}^{+\infty} = 1.$$

a stosując twierdzenie Fubiniego otrzymujemy

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(\varepsilon p) \hat{f}(p) dp = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} H(\varepsilon p) \left((2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot y} f(y) dy \right) dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot p} H(\varepsilon p) dp \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \frac{x-y}{\varepsilon} \cdot \varepsilon p} H(\varepsilon p) d(\varepsilon p) \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d} \left((2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \frac{x-y}{\varepsilon} \cdot p'} H(p') dp' \right) f(y) dy = (h_\varepsilon * f)(x) \end{aligned}$$

DOWÓD

Teraz z poprzedniego twierdzenia wiemy, że

$$g_\varepsilon = h_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} f$$

w $L_1(\mathbb{R}^d)$ i w konsekwencji istnieje ciąg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $g_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ prawie wszędzie, a stąd $g = f$ prawie wszędzie. $\square$

WNIOSEK

Transformacja Fouriera jest injektywnym operatorem $L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$.

DOWÓD

Z lematu Riemanna-Lebesgue'a wiemy, że obraz odwzorowania $f \mapsto \hat{f}$ zawiera się w $C_0(\mathbb{R}^d)$. Jeśli $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ spełnia $\hat{f} = 0$, to oczywiście $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, a więc $f = 0$ wynika natychmiast z ostatniego twierdzenia. □