

# METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 15

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

## ZASTOSOWANIE INJEKTYWNOŚCI TRANSFORMACJI FOURIERA

Niech  $\rho$  będzie ściśle dodatnią funkcją na przedziale  $]a, b[$  taką, że istnieje  $\varepsilon > 0$ , dla którego

$$\int_a^b e^{\varepsilon|x|} \rho(x) \, dx < +\infty.$$

Wówczas zbiór funkcji wielomianowych na  $]a, b[$  jest gęstą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $L_2(]a, b[, \rho)$ .

## SZKIC DOWODU

Po pierwsze dla każdego  $k \in \mathbb{Z}_+$  mamy  $|x^k| \leq \frac{k!}{\varepsilon^k} e^{\varepsilon|x|}$ , a więc dla każdego  $k$  funkcja  $x^k$  jest całkowalna względem miary  $\rho(x)dx$ . W szczególności  $x^{2k}$  jest całkowalna, czyli  $x^k$  jest całkowalna z kwadratem, a w konsekwencji wszystkie funkcje wielomianowe są całkowalne z kwadratem.

Weźmy  $\psi \in L_2(]a, b[, \rho)$ . Wtedy, ponieważ funkcja  $x \mapsto e^{\frac{\varepsilon}{2}|x|}$  jest całkowalna z kwadratem, funkcja  $x \mapsto e^{\frac{\varepsilon}{2}x}\psi(x)$  jest całkowalna. Nietrudno stąd wywnioskować, że funkcja

$$F(z) = \int_a^b e^{-izx} \psi(x) \rho(x) dx, \quad |\operatorname{Im} z| < \frac{\varepsilon}{2}$$

jest holomorficzna.

## SZKIC DOWODU

Co więcej, dla  $n \in \mathbb{Z}_+$  mamy

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_a^b x^n \psi(x) \rho(x) dx.$$

Teraz przypuśćmy, że  $\psi$  jest ortogonalna do przestrzeni wszystkich funkcji wielomianowych. Wtedy  $F^{(n)}(0) = 0$  dla każdego  $n$ , a więc  $F = 0$ . Ale  $F|_{\mathbb{R}}$  jest transformatą Fouriera całkowalnej funkcji  $x \mapsto \sqrt{2\pi} \psi(x) \rho(x) \mathbf{1}_{]a,b[}$ , a więc  $\rho\psi \doteq 0$ , co pociąga  $\psi \doteq 0$ .  $\square$

## TWIERDZENIE

Odwzorowanie  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  rozszerza się do unitarnego operatora  $L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ .

## DOWÓD

Weźmy  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . Korzystając z twierdzenia Fubiniego i odwracalności transformacji Fouriera obliczamy

$$\begin{aligned}\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(p)} \left( (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ip \cdot x} g(x) dx \right) dp = \int_{\mathbb{R}^d} \left( (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(p)} e^{-ip \cdot x} dp \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\left( (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(p) e^{ix \cdot p} dp \right)} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle f | g \rangle.\end{aligned}$$

Stąd odwzorowanie  $f \mapsto \hat{f}$  jest izometrią dla normy  $\| \cdot \|_2$ . Jako że  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  jest gęstą podprzestrzenią  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , odwzorowanie to rozszerza się jednoznacznie do izometrii  $L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ , która jest surjekcją, gdyż jej obraz zawiera gęstą podprzestrzeń  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . □

## DEFINICJA

**Transformacją Fouriera na  $L_2(\mathbb{R}^d)$**  nazywamy operator unitarny będący jedynym ciągłym rozszerzeniem operacji  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  na  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Oznaczmy go  $\psi \mapsto \hat{\psi}$  ( $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ) lub symbolem  $\mathcal{F}$ .

## UWAGA

Odwzorowanie  $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$  można również skonstruować w następujący sposób:

- sprawdzamy, że dla  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$  mamy  $\hat{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ,
- następnie sprawdzamy, że  $\|\hat{\psi}\|_2 = \|\psi\|_2$  dla  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ ,
- definiujemy  $\mathcal{F}$  jako jedyne ciągłe rozszerzenie operacji

$$L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d) \ni \psi \longmapsto \hat{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

## STWIERDZENIE

Niech  $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  i oznaczmy

$$\phi_n(p) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\text{Ball}(0,n)} e^{-ip \cdot x} \varphi(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^d.$$

Wtedy  $\phi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{F}\varphi$  w  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

## DOWÓD

Niech  $\varphi_n = \mathbf{1}_{\overline{\text{Ball}(0,n)}} \varphi$ . Wówczas  $\varphi_n \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$  i  $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$  w  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Wynika stąd, że  $\phi_n = \mathcal{F}\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{F}\varphi$ . □

- Przyjmijmy oznaczenie  $\mathcal{F}$  także na transformację Fouriera  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ :

$$(\mathcal{F}T)(f) = T(\hat{f}), \quad T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

- Dla  $s \in \mathbb{R}$  niech  $\sigma_s(y) = (1 + \|y\|^2)^{-\frac{s}{2}}$  ( $y \in \mathbb{R}^d$ ) i niech  $M_{\sigma_s}$  oznacza operator mnożenia przez funkcję  $\sigma_s$ .
- Wreszcie niech

$$J_s = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s} \circ \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

## STWIERDZENIE

Mamy

$$J_s \circ J_t = J_{s+t}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

a  $J_0$  jest operatorem identycznościowym na  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .

## DOWÓD

Drugi punkt jest oczywisty. Z kolei

$$\begin{aligned} J_s \circ J_t &= \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_t} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s} \circ M_{\sigma_t} \circ \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_s \sigma_t} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\sigma_{s+t}} \circ \mathcal{F} = J_{s+t}. \end{aligned}$$



- Dla każdego  $s$  operator  $J_s$  jest odwracalny (z odwrotnym  $J_{-s}$ ).
- Przypomnijmy, że  $L_2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .

## DEFINICJA

Definiujemy **przestrzeń Sobolewa**  $H^s$

$$H^s = J_s(L_2(\mathbb{R}^d))$$

oraz

$$\|u\|_{2,s} = \|J_{-s}u\|_2, \quad u \in H^s.$$

## STWIERDZENIE

$(H^s, \|\cdot\|_{2,s})$  jest przestrzenią Hilberta dla każdego  $s \in \mathbb{R}$ .

## DOWÓD

Z definicji  $\|\cdot\|_{2,s}$  jest normą na  $H^s$ , a  $J_s$  jest izometrią  $L_2(\mathbb{R}^d)$  na  $H^s$ . Stąd  $H^s$  z normą  $\|\cdot\|_{2,s}$  jest przestrzenią Banacha izometryczną z przestrzenią Hilberta  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . □

## STWIERDZENIE

Ustalmy  $s, t \in \mathbb{R}$ . Wówczas  $J_t$  jest izometrią  $H^s$  na  $H^{s+t}$ .

## DOWÓD

Weźmy  $u \in H^s$ . Wtedy  $u = J_s \psi$  dla pewnego  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Tak więc

$$J_t u = J_t J_s \psi = J_{s+t} \psi$$

należy do  $H^{s+t}$  i każdy element  $H^{s+t}$  jest tej postaci dla pewnego  $u \in H^s$  (jeśli  $v \in H^{s+t}$ , to mamy  $v = J_t u$  dla  $u = J_{-t} v = J_s(J_{-(s+t)} v) \in H^s$ ). Ponadto

$$\|J_t u\|_{2,s+t} = \|J_{-(s+t)} J_t u\|_2 = \|J_{-s} u\|_2 = \|u\|_{2,s},$$

a więc  $J_t$  jest izometrią. □

**TWIERDZENIE SOBOLEWA O WŁOŻENIU**

Niech  $s, t \in \mathbb{R}$  będą takie, że  $s \leq t$ . Wtedy  $H^t \subset H^s$  oraz

$$\|u\|_{2,s} \leq \|u\|_{2,t}, \quad u \in H^t.$$

- Zauważmy, że twierdzenie jest oczywiste w przypadku  $s = t$ . W dalszym ciągu będziemy zakładać, że  $s < t$ .

**LEMAT**

Niech  $s > 0$ . Wówczas dla każdego  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  mamy  $J_s \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  oraz

$$\|J_s \psi\|_2 \leq \|\psi\|_2, \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

- Przypomnijmy, że dla  $s > 0$  mamy  $\sigma_s = \widehat{G_s}$ , gdzie  $G_s$  jest pewną funkcją całkowalną.

## DOWÓD LEMATU

Założmy na razie, że  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ . Wtedy

$$\widehat{J_s \psi}(y) = \sigma_s(y) \hat{\psi}(y) = \widehat{G_s}(y) \hat{\psi}(y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \widehat{G_s * \psi}(y).$$

Innymi słowy  $J_s \psi = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} G_s * \psi$ . Stąd dla  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$  mamy  $J\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  and  $\|J_s \psi\|_2 \leq \|(2\pi)^{-\frac{d}{2}} G_s\|_1 \|\psi\|_2 = \|\psi\|_2$ .

Wynika stąd, że dla  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$  mamy  $J_s \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  i  $\|J_s \psi\|_2 \leq \|\psi\|_2$ . Tak więc teza wynika z gęstości  $L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$  w  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . □

## DOWÓD TWIERDZENIA SOBOLEWA

Weźmy  $u \in H^t$ . Wówczas  $u = J_t \psi$  dla jedyne go  $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$  (dokładniej  $\psi = J_{-t}u$ ). Stąd

$$J_{-s}u = J_{t-s}J_{-t}u = J_{t-s}\psi$$

należy do  $L_2(\mathbb{R}^d)$  na mocy lematu. Innymi słowy  $u \in H^s$ . Dalej

$$\|J_{-s}u\|_2 = \|J_{t-s}\psi\|_2 \leq \|\psi\|_2$$

(ponieważ  $t - s > 0$ ). W terminach norm na przestrzeniach  $H^s$  i  $H^t$  ostatnia nierówność oznacza

$$\|u\|_{2,s} \leq \|u\|_{2,t}.$$



## PRZYKŁAD

Rozważmy  $u \in H^s$  oraz  $v \in H^{-s}$ . Mamy  $J_{-s}u, J_s v \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , tj.

$$\mathcal{F}^{-1} M_{\sigma_{-s}} \mathcal{F} u, \mathcal{F}^{-1} M_{\sigma_s} \mathcal{F} v \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że odwzorowanie  $\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  zachowuje podprzestrzeń  $L_2(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ , a więc  $\sigma_{-s}\hat{u}, \sigma_s\hat{v} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . W szczególności  $\hat{u}\hat{v} = \sigma_{-s}\hat{u}\sigma_s\hat{v} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ , a stąd całka

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x)\hat{v}(x) dx$$

jest dobrze zdefiniowana. Ponadto funkcjonal  $u \mapsto \int \hat{u}\hat{v}$  jest złożeniem

$$H^s \ni u \longmapsto J_{-s}u \xrightarrow{\mathcal{F}} \sigma_{-s}\hat{u} \longmapsto \int \sigma_{-s}\hat{u}\sigma_s\hat{v} = \int \hat{u}\hat{v} \in \mathbb{C}.$$

## PRZYKŁAD

Pierwsze odwzorowanie (tj.  $J_{-s}$ ) jest izometrią  $H^s$  na  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , drugie jest unitarne na  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , a trzecie jest ciągłym funkcjonałem na  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , gdyż  $\sigma_s \hat{v} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Innymi słowy każda dystrybucja  $v \in H^{-s}$  wyznacza ciągły funkcjonał na  $H^s$ .

Dalej z definicji  $H^s$  (oraz  $H^{-s}$ ) wynika, że gdy para  $(u, v)$  przebiega  $H^s \times H^{-s}$ , funkcja  $\hat{u}\hat{v}$  przebiega zbiór wszystkich iloczynów  $\psi\varphi$  przy  $\psi, \varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Stąd każdy ciągły funkcjonał liniowy na  $H^s$  jest dany przez

$$u \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x) \hat{v}(x) \, dx$$

dla jedynej  $v \in H^{-s}$ . Innymi słowy przestrzeń sprzężona do  $H^s$  może być w naturalny sposób utożsamiona z  $H^{-s}$ .

- Definicja  $H^s$  mówi, że każdy element  $u \in H^s$  jest taką dystrybucją, że  $\mathcal{F}^{-1}M_{\sigma_{-s}}\mathcal{F}u$  należy do  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .
- Przykładowo jeśli  $s = 1$ , to  $\mathcal{F}^{-1}M_{\sigma_{-s}}\mathcal{F} = (1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}$ , a więc  $H^s$  ma interpretację przestrzeni tych dystrybucji, których pierwsza pochodna (“pierwiastek z laplasjanu”) należy do  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .
- Analogicznie  $H^2$  możemy interpretować jako dystrybucje, których pochodne drugiego rzędu są w  $L_2(\mathbb{R}^d)$  itd.
- Z kolei na elementy  $H^{-1}$  możemy patrzeć jako na pochodne dystrybucji z  $L_2(\mathbb{R}^2)$ , a na elementy  $H^{-2}$  jako na drugie pochodne dystrybucji z  $L_2(\mathbb{R}^d)$  itd.