

NIERÓWNOŚĆ HÖLDERA: (Ω, μ) , $p, q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ MIERZALNE. WTEDY

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

WNIOSEK NIECH (Ω, μ) SPEENIA $\mu(\Omega) < +\infty$. WTEDY JEŚLI $p > q$, TO $L_p(\Omega, \mu) \subset L_q(\Omega, \mu)$.

DOWÓD POKAŻEMY, ŻE $\|f\|_p < +\infty \Rightarrow \|f\|_q < +\infty$.

NIECH $p' = \frac{p}{p-q}$, $q' = \frac{p}{q}$ ($\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$).

$$\|f\|_q^q = \| |f|^q \|_1 = \| 1_\Omega |f|^q \|_1 \stackrel{H}{\leq} \underbrace{\|1_\Omega\|_{p'}}_{C = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p'}}} \| |f|^q \|_{q'}$$

$$= C \| |f|^q \|_{q'} = C \| |f|^q \|_{\frac{p}{q}} = C \left(\int |f|^q \frac{p}{q} d\mu \right)^{\frac{q}{p}}$$

$$= C \left(\left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q = C \|f\|_p^q < +\infty \quad \square$$

$$L_2(\Omega, \mu) \subset L_1(\Omega, \mu) \quad (\text{gdy } \mu(\Omega) < \infty)$$

OPERATORY OGRANICZONE

STWIERDZENIE X, Y - P-NIE Z NORMĄ, $T: X \rightarrow Y$ - LINIOWE.

WTEDY N.W.S.R.

- 1) ODWZOROWANIE T JEST CIĄGŁE,
- 2) _____ " _____ W $0 \in X$,
- 3) $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$.

TERMINOLOGIA: DLA LINIOWYCH $T: X \rightarrow Y$

CIĄGŁOŚĆ = OGRANICZONOŚĆ

ZBIÓR OGRANICZONYCH LINIOWYCH $T: X \rightarrow Y$ OZNACZAMY $B(X, Y)$
(POZA TYM $B(X, X) = B(X)$)

• FUNKCJA

$$B(X, Y) \ni T \longmapsto \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \in [0, +\infty[$$

JEST NORMĄ NA P-NI $B(X, Y)$, OZN. $\|T\|$.

• JEŚLI Y - BANACHA, TO $B(X, Y)$ - BANACHA

• $B(X, \mathbb{C}) \stackrel{\text{ozn.}}{=} X^*$ - P-N SPRZĘŻONA DO X

• $X \hookrightarrow X^* \hookrightarrow (X^*)^* \stackrel{\text{ozn.}}{=} X^{**}$

• MAMY ODWZOROWANIE $\mathcal{J}_X: X \longrightarrow X^{**}$

$$x \longmapsto (X^* \ni \varphi \longmapsto \varphi(x) \in \mathbb{C})$$

ALG: $\dim V < +\infty$
 $V \cong V^{**}$

FAKT: $\mathcal{J}_X$ JEST IZOMETRIĄ (TW. HAHNA-BANACHA), ZAZWYCZAJ

$\mathcal{J}_X$ NIE JEST NA.

PRZESTRZENIE SKOŃCZENIE WYMIAROWE

TWIERDZENIE NIECH $(X, \|\cdot\|)$ BĘDZIE SKOŃCZENIE WYMIAROWA. WTEDY

1) DLA DOW. P-NI Z NORMĄ Y I DOWOLNEGO LINIOWEGO $T: X \rightarrow Y$ MAMY $T \in B(X, Y)$,

2) JEŚLI $\|\cdot\|'$ JEST (INNĄ) NORMĄ NA X , TO $\exists c_1, c_2 > 0$ TAKIE, ŻE $\forall x \in X \quad c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|$.

3) KAŻDY DOMKNIĘTY I OGRANICZONY $K \subset X$ JEST ZWARTY,

4) X JEST PRZESTRZENIĄ BANACHA.

UWAGA Z 4) WYNIKA, ŻE KAŻDA SK. WYM. PODP-N W P-NI Z NORMĄ JEST DOMKNIĘTA.

FORMY PÓŁDRA LINIOWE

DEF. V - P-N WEKTOROWA NAD $\mathbb{C}$. FORMĄ PÓŁDRA LINIOWĄ NA V

NAZYWAMY $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ TAKIE, ŻE

1) $\forall v \in V$ ODWZ. $V \ni w \longmapsto F(v, w) \in \mathbb{C}$ JEST LINIOWE,

2) $\forall w \in V$ ODWZ. $V \ni v \longmapsto F(v, w) \in \mathbb{C}$ JEST ANTYLINIOWE.

ANTYLINIOWE $\nearrow$ $F(v, w)$ $\nwarrow$ LINIOWE

Powiemy, że forma $\mathbb{C}$ -liniowa F jest

- 1) HERMITOWSKA, JEŚLI $F(w, v) = \overline{F(v, w)}$,
- 2) DODATNIA, JEŚLI $\forall v \in V \quad F(v, v) \geq 0$,
- 3) ŚCIŚLE DODATNIA, JEŚLI $\forall v \in V \setminus \{0\} \quad F(v, v) > 0$.

ILOZYNEM SKALARNYM NA V NĄZYWAMY ŚCIŚLE DODATNIAJĄ
FORMĘ $\mathbb{C}$ -LINIOWĄ NA V .

FORMUŁA POLARYZACYJNA

Tw. NIECH F - FORMA $\mathbb{C}$ -LINIOWA NA V (NAD $\mathbb{C}$!). WIEDY

$$F(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k F(\underbrace{w + i^k v}_{\text{TO SAMO}}, \underbrace{w + i^k v}_{\text{TO SAMO}}), \quad v, w \in V. \quad (*)$$

DOWÓD

$$\begin{aligned} F(w+v, w+v) &= F(w, w) + F(w, v) + F(v, w) + F(v, v) \\ i F(w+iv, w+iv) &= i F(w, w) - F(w, v) + F(v, w) + i F(v, v) \\ -F(w-v, w-v) &= -F(w, w) + F(w, v) + F(v, w) - F(v, v) \\ -i F(w-iv, w-iv) &= -i F(w, w) - F(w, v) + F(v, w) - i F(v, v) \\ + \hline &0 + 0 + 4F(v, w) + 0 \end{aligned} \quad \square$$

INNÉ FORMY FORMUŁY POLARYZACYJNEJ

$$F(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} F(v + i^k w, v + i^k w) \quad (**)$$

CIEKAWOSTKA

$$F(v, w) = \int_{\mathbb{T}} z F(w + zv, w + zv) d\mu(z)$$

GDZIE μ - MIARA BORELWSKA NA $\mathbb{T}$ TAKA, ŻE $\int_{\mathbb{T}} z d\mu = \int_{\mathbb{T}} z^2 d\mu = 0$

Stw. 1) ŚCIŚLE DODATNIA FORMA $\mathbb{C}$ -LINIOWA JEST DODATNIA,
2) DODATNIA FORMA $\mathbb{C}$ -LINIOWA JEST HERMITOWSKA.

$$\left\{ \begin{array}{l} B(x, y) = \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) \quad Q(z) = B(z, z) \end{array} \right.$$

Dowód 2)

$$\begin{aligned} F(v, w) &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k F(w + i^k v, w + i^k v) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} F(w + i^k v, w + i^k v) \\ &\stackrel{(**)}{=} F(w, v). \end{aligned}$$

Stw. Niech F - dodatnia forma $\frac{1}{2}$ -liniowa na V . Wtedy

$$|F(v, w)| \leq F(v, v)^{\frac{1}{2}} F(w, w)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Jeśli } F\text{-il.sk. } F(\cdot, \cdot) = \langle \cdot | \cdot \rangle \\ |\langle v | w \rangle| \leq \sqrt{\langle v | v \rangle} \sqrt{\langle w | w \rangle} \\ = \|v\| \cdot \|w\| \end{array} \right.$$

(Nierówność SCHWARZA)

$$F(v + tw, v + tw) \geq 0$$

//

Wiel. kwadratowy od $t \in \mathbb{R}$ współczynnikach

$$\Delta \leq 0$$

Wniosek Niech V będzie $\mathbb{P}$ -nią z iloczynem skalarnym $(\langle \cdot | \cdot \rangle)$. Wtedy

1) Funkcja $V \ni v \mapsto \sqrt{\langle v | v \rangle} \in [0, +\infty[$ jest normą na V

2) Jeśli $v, w \in V$ spełniają $|\langle v | w \rangle| = \|v\| \|w\|$, to v i w są proporcjonalne

3) Iloczyn skalarny jest ciągły względem metryki wyznaczonej przez normę i jednostajnie ciągły na zbiorach ograniczonych

$$4) \forall v \in V \quad \|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w | v \rangle|$$

5) Jeśli v_1, v_2 spełniają $\forall w \in V \quad \langle w | v_1 \rangle = \langle w | v_2 \rangle$, to $v_1 = v_2$.

Dowód 1)

$$\bullet \| \lambda v \| = \sqrt{\langle \lambda v | \lambda v \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle v | v \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle v | v \rangle} = |\lambda| \|v\|$$

$$\bullet \text{Dla } v \neq 0 \quad \|v\|^2 = \langle v | v \rangle > 0 \quad (\text{czyli } \|v\| > 0)$$

$$\begin{aligned} \bullet \|v + w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v | w \rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 |\langle v | w \rangle| + \|w\|^2 \stackrel{(5)}{\leq} \|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \quad (\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|). \end{aligned}$$