

# TEORIA GRUP II – WYKŁAD 1.

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

## DEFINICJA

**Macierzowa grupa Liego** jest to domknięta podgrupa  $GL(n, \mathbb{C})$ .

## PRZYKŁADY

- ❶  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $SO(n)$ .
- ❷  $\mathbb{R}^n$  jest izomorficzna (jako grupa topologiczna) z podgrupą

$$\left\{ \begin{bmatrix} e^{x^1} & & & \\ & e^{x^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{x^n} \end{bmatrix} \mid x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ❸  $\mathbb{R}^\times \cong GL(1, \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{C}^\times \cong GL(1, \mathbb{C})$ ,  $\mathbb{T} \cong U(1)$ .
- ❹  $GL(n, \mathbb{Q})$  nie jest macierzową grupą Liego.
- ❺ Niech  $\theta \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ . Wtedy podgrupa  $\left\{ \begin{bmatrix} e^{2\pi i t} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \theta t} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \leq GL(2, \mathbb{C})$  nie jest macierzową grupą Liego.

## PRZYKŁAD (UOGÓLNIONE GRUPY ORTOGONALNE)

Ustalmy  $n, k \in \mathbb{N}$  i niech  $g$  będzie formą kwadratową na  $\mathbb{R}^{n+k}$  o sygnaturze  $(n, k)$ , tj.  $g(x, y) = x^i g_{ij} y^j$ , gdzie

$$g_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \in \{1, \dots, n\} \\ -1 & i = j \in \{n+1, \dots, n+k\} \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Grupę  $O(n, k)$  definiujemy jako grupę tych  $A \in \text{GL}(n+k, \mathbb{R})$ , które zachowują formę  $g$ . Nietrudno się przekonać, że  $A \in O(n, k)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A^\top g A = g$  (gdzie  $g$  oznacza macierz o wyrazach  $g_{ij}$ ). Jest jasne, że  $O(n, k)$  jest macierzową grupą Liego. Definiujemy też  $\text{SO}(n, k) = O(n, k) \cap \text{SL}(n+k, \mathbb{R})$ .

Grupa  $O(1, 3)$  jest oczywiście tożsama z grupą Lorentza  $L$ .

## UOGÓLNIONE GRUPY UNITARNE

Ustalmy  $n, k \in \mathbb{N}$  i rozważmy hermitowską formę półtoraliniową na  $\mathbb{C}^{n+k}$

$$g(z, w) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i - \sum_{i=n+1}^{n+k} \bar{z}_i w_i.$$

Grupę  $U(n, k)$  definiujemy jako grupę tych  $A \in GL(n+k, \mathbb{C})$ , które zachowują formę  $g$ . Jest jasne, że  $A \in U(n, k)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A^\dagger g A = g$  (gdzie  $g$  jest taka jak w poprzednim przykładzie). Ponadto definiujemy  $SU(n, k) = U(n, k) \cap SL(n+k, \mathbb{C})$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Niech  $\omega$  będzie antysymetryczną formą na  $\mathbb{R}^{2n}$  daną wzorem  $\omega(x, y) = x^i \omega_{ij} y^j$ , gdzie  $\omega_{ij}$  są wyrazami macierzy

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1}_n \\ -\mathbb{1}_n & 0 \end{bmatrix}$$

**Rzeczywistą grupę symplektyczną**  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  definiujemy jako grupę tych  $A \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ , które zachowują formę  $\omega$ , tj. spełniają  $A^\top \Omega A = \Omega$ .

Analogicznie **zespoloną grupę symplektyczną**  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ :

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^\top \Omega A = \Omega\}.$$

Wreszcie **zwartą grupę symplektyczną**  $\mathrm{Sp}(n)$  definiujemy jako

$$\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2n).$$

Oczywiście  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  i  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$  są macierzowymi grupami Liego.

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Poniżej podamy inny opis grupy  $\mathrm{Sp}(n)$ . W tym celu zauważmy, że każda macierz  $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{H})$  definiuje odwzorowanie  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  przez mnożenie (kolumnowego) wektora  $x \in \mathbb{H}^n$  z lewej przez  $M$ . Odwzorowanie to nie jest  $\mathbb{H}$ -liniowe w zwykłym sensie, ale jest **prawo  $\mathbb{H}$ -liniowe**, tj. mamy  $M(xq) = M(x)q$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{H}^n$  i  $q \in \mathbb{H}$ . Ponadto każde prawo  $\mathbb{H}$ -liniowe odwzorowanie  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  jest mnożeniem przez jedyną macierz  $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{H})$

Niech  $\Lambda: \mathbb{C}^{2n} \ni \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \mapsto \alpha + j\beta \in \mathbb{H}^n$ . Jest jasne, że  $\Lambda$  jest bijekcją. Wreszcie zdefiniujmy antyliniowe odwzorowanie  $J: \mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$  kładąc  $J \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \end{bmatrix}$ .

Udowodnimy:

- ❶ Niech  $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{H})$ . Wtedy  $\Lambda^{-1}M\Lambda$  jest  $\mathbb{C}$ -liniowym odwzorowaniem  $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$  komutującym z  $J$ .
- ❷ Niech  $A \in \mathrm{B}(\mathbb{C}^{2n})$  spełnia  $JA = AJ$ . Wtedy  $\Lambda A \Lambda^{-1}$  jest prawo  $\mathbb{H}$ -liniowym odwzorowaniem  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Ad ❶. Ewidentnie dla  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$  i  $\lambda \in \mathbb{C}$  mamy  $\Lambda\left(\lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right) = \Lambda\left(\begin{bmatrix} \alpha\lambda \\ \beta\lambda \end{bmatrix}\right) = \Lambda\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right)\lambda$ , a stąd dla dowolnej macierzy  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{H})$

$$(\Lambda^{-1}M\Lambda)(\lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}) = \Lambda^{-1}\left(M(\Lambda(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix})\lambda)\right) = \Lambda^{-1}\left(M(\Lambda(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}))\lambda\right) = (\Lambda^{-1}M\Lambda)(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix})\lambda = \lambda(\Lambda^{-1}M\Lambda)(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}).$$

Dalej

$$\begin{aligned} (\Lambda J)(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}) &= \Lambda\left(\begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \end{bmatrix}\right) = \bar{\beta} - j\bar{\alpha} = \beta_1 - i\beta_2 - j(\alpha_1 - i\alpha_2) = \beta_1 - i\beta_2 - j\alpha_1 - k\alpha_2 \\ &= -(\alpha_1 + i\alpha_2 + j\beta_1 - k\beta_2)j = -(\alpha + j\beta)j = -\Lambda\left(\begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \end{bmatrix}\right)j, \end{aligned}$$

a więc  $\Lambda J = -R_j\Lambda$ , gdzie  $R_j$  oznacza operację mnożenia z prawej strony przez  $j$  (i automatycznie  $J\Lambda^{-1} = -\Lambda^{-1}R_j$ ). W konsekwencji

$$\Lambda^{-1}M\Lambda J = -\Lambda^{-1}MR_j\Lambda = -\Lambda^{-1}R_jM\Lambda = J\Lambda^{-1}M\Lambda.$$

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Ad ②. Weźmy  $x \in \mathbb{H}^n$  i niech  $x = \Lambda \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right)$  dla pewnego wektora  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$ . Dalej zapiszmy  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  oraz  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^n$ . Zauważmy, że  $\alpha j = (\alpha_1 + i\alpha_2)j = j(\alpha_1 - i\alpha_2) = j\bar{\alpha}$  i podobnie  $\beta j = j\bar{\beta}$ , a stąd jeśli  $q = q^0 + iq^1 + jq^2 + kq^3 = z_1 + j\bar{z}_2$  (gdzie  $z_1 = q^0 + iq^1$  i  $z_2 = q^2 + iq^3$ ), to

$$\begin{aligned} xq &= (\alpha + j\beta)(z_1 + j\bar{z}_2) = \alpha z_1 + j\beta z_1 + \alpha j\bar{z}_2 + j\beta j\bar{z}_2 = \alpha z_1 + j\beta z_1 + j\bar{\alpha}z_2 - \bar{\beta}z_2 \\ &= \Lambda \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} -\bar{\beta} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \bar{z}_2 \right) = \Lambda \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} -\bar{\beta} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} \bar{z}_2 \right) = \Lambda \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} z_1 - \begin{bmatrix} \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \end{bmatrix} \bar{z}_2 \right) \\ &= \Lambda \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} z_1 - J \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right) \bar{z}_2 \right). \end{aligned}$$

Tak więc pisząc  $\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix}$  na  $A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  i korzystając ze wzoru  $\Lambda J = -R_j \Lambda$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} (\Lambda A \Lambda^{-1})(xq) &= (\Lambda A) \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} z_1 - J \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right) \bar{z}_2 \right) = \Lambda \left( \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} z_1 + \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} j\bar{z}_2 \right) \\ &= (\Lambda A \Lambda^{-1})(x)(z_1 + j\bar{z}_2) = (\Lambda A \Lambda^{-1})(x)q. \end{aligned}$$

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Dalej dla  $x, y \in \mathbb{H}^n$  niech  $\langle x|y \rangle_{\mathbb{H}}$  oznacza  $\sum_{l=1}^n \overline{x^l} y^l$ , gdzie sprzężenie kwaternionu zdefiniowane jest wzorem

$$\overline{q^0 + iq^1 + jq^2 + kq^3} = q^0 - iq^1 - jq^2 - kq^3.$$

Powiemy, że  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{H})$  zachowuje  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ , jeśli  $\langle Mx | My \rangle_{\mathbb{H}} = \langle x | y \rangle_{\mathbb{H}}$  dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{H}^n$ .

Następnie sprawdźmy, że dla dowolnych  $a, b \in \mathbb{C}^{2n}$  mamy

$$\langle \Lambda(a) | \Lambda(b) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle a | b \rangle + j\omega(a, b), \quad (\star)$$

gdzie  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  jest standardowym (półtoraliniowym) iloczynem skalarnym na  $\mathbb{C}^{2n}$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Niech  $a = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  i  $b = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ . Mamy

$$\langle \Lambda(a) | \Lambda(b) \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{l=1}^n (\alpha_1^l - i\alpha_2^l - j\beta_1^l + k\beta_2^l)(\gamma_1^l + i\gamma_2^l + j\delta_1^l - k\delta_2^l)$$

gdzie  $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 + i\alpha_2^1 \\ \vdots \\ \alpha_1^n + i\alpha_2^n \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1^1 + i\beta_2^1 \\ \vdots \\ \beta_1^n + i\beta_2^n \end{bmatrix}$ ,  $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1^1 + i\gamma_2^1 \\ \vdots \\ \gamma_1^n + i\gamma_2^n \end{bmatrix}$ ,  $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1^1 + i\delta_2^1 \\ \vdots \\ \delta_1^n + i\delta_2^n \end{bmatrix}$ . Dalej

$$\begin{aligned} & (\alpha_1^l - i\alpha_2^l - j\beta_1^l + k\beta_2^l)(\gamma_1^l + i\gamma_2^l + j\delta_1^l - k\delta_2^l) \\ &= \alpha_1^l \gamma_1^l + \alpha_2^l \gamma_2^l + \beta_1^l \delta_1^l + \beta_2^l \delta_2^l + i(\alpha_1^l \gamma_2^l - \alpha_2^l \gamma_1^l + \beta_1^l \delta_2^l - \beta_2^l \delta_1^l) \\ & \quad + j(\alpha_1^l \delta_1^l - \beta_1^l \gamma_1^l + \beta_2^l \gamma_2^l - \alpha_2^l \delta_2^l) + k(-\alpha_1^l \delta_2^l + \beta_2^l \gamma_1^l - \alpha_2^l \delta_1^l + \beta_1^l \gamma_2^l) \\ &= (\alpha_1^l - i\alpha_2^l)(\gamma_1^l + i\gamma_2^l) + (\beta_1^l - i\beta_2^l)(\delta_1^l + i\delta_2^l) \\ & \quad + j(\alpha_1^l \delta_1^l - \beta_1^l \gamma_1^l + \beta_2^l \gamma_2^l - \alpha_2^l \delta_2^l + i(\alpha_1^l \delta_2^l - \beta_2^l \gamma_1^l + \alpha_2^l \delta_1^l - \beta_1^l \gamma_2^l)). \end{aligned}$$

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Z drugiej strony

$$\begin{aligned}\omega(a, b) &= [\alpha^\top \ \beta^\top] \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = [\alpha^1 \ \dots \ \alpha^n \ \beta^1 \ \dots \ \beta^n] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta^n \\ -\gamma^1 \\ \vdots \\ -\gamma^n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^n (\alpha^l \delta^l - \beta^l \gamma^l) \\ &= \sum_{l=1}^n ((\alpha_1^l + i\alpha_2^l)(\delta_1^l + i\delta_2^l) - (\beta_1^l + i\beta_2^l)(\gamma_1^l + i\gamma_2^l))\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(\alpha_1^l + i\alpha_2^l)(\delta_1^l + i\delta_2^l) - (\beta_1^l + i\beta_2^l)(\gamma_1^l + i\gamma_2^l) \\ = \alpha_1^l \delta_1^l - \alpha_2^l \delta_2^l - \beta_1^l \gamma_1^l + \beta_2^l \gamma_2^l + i(\alpha_1^l \delta_2^l + \alpha_2^l \delta_1^l - \beta_1^l \gamma_2^l - \beta_2^l \gamma_1^l),\end{aligned}$$

co kończy dowód (★).

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Udowodnimy teraz

❸  $A \in \text{Sp}(n)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = \Lambda^{-1}M\Lambda$  dla  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{H})$  zachowującego  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ .

Niech  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{H})$  zachowuje  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$  połóżmy  $A = \Lambda^{-1}M\Lambda$ . Wtedy podstawiając  $Aa$  i  $Ab$  w miejsce  $a$  i  $b$  we wzorze  $(\star)$  otrzymujemy

$$\langle \Lambda(a) | \Lambda(b) \rangle_{\mathbb{H}} = \langle Aa | Ab \rangle + j\omega(Aa, Ab),$$

a więc  $A$  zachowuje  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  (tj.  $A$  jest operatorem unitarnym) i  $A$  zachowuje  $\omega$ .

Odwrotnie, jeśli  $A \in \text{Sp}(n)$ , to po pierwsze  $A$  komutuje z  $J$ . Aby to wykazać zauważmy, że  $A \in \text{Sp}(n)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\bar{A} \in \text{Sp}(n)$ . Wynika to z faktu, że zespolone (nie hermitowskie) sprzężenie macierzy jest odwzorowaniem multiplikatywnym i przemiennym z transpozycją, a więc sprzęgając (hermitowsko) obie strony równości  $A^{\top}\Omega A = \Omega$  dostajemy  $A^{\dagger}(-\Omega)\bar{A} = -\Omega$ , czyli  $\bar{A}^{\top}\Omega\bar{A} = \Omega$ . Podobnie stosując transpozycję do obu stron  $A^{\dagger}A = \mathbb{1}$  otrzymujemy  $A^{\top}\bar{A} = \mathbb{1}$ , czyli  $\bar{A}^{\dagger}\bar{A} = \mathbb{1}$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

Możemy więc przyjąć, że  $A = \overline{B}$  dla pewnego  $B \in \operatorname{Sp}(n)$  (konkretnie  $B = \overline{A}$ ). Teraz niech  $C$  oznacza operację sprzężenia zespolonego wektorów z  $\mathbb{C}^{2n}$ . Mamy  $J = \Omega C$ , czyli  $\Omega = JC$ . Wreszcie  $CD = \overline{D}C$  dla każdej macierzy  $D \in \operatorname{B}(\mathbb{C}^{2n})$ . Stąd odstawiamy następujący ciąg równości

$$B^{\top} \Omega B = \Omega,$$

$$B^{\top} JCB = JC,$$

$$B^{\top} J\overline{B}C = JC,$$

$$B^{\top} J\overline{B} = J,$$

$$A^{\dagger} JA = J,$$

czyli  $JA = AJ$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY SYMPLEKTYCZNE)

W konsekwencji  $A = \Lambda^{-1}M\Lambda$  dla pewnego (i jedyne)  $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{H})$  i korzystając dwukrotnie ze wzoru (★) dostajemy

$$\begin{aligned}\langle Mx|My\rangle_{\mathbb{H}} &= \langle \Lambda A \Lambda^{-1}x | \Lambda A \Lambda^{-1}y \rangle_{\mathbb{H}} = \langle A \Lambda^{-1}x | A \Lambda^{-1}y \rangle + j\omega(A \Lambda^{-1}x, A \Lambda^{-1}y) \\ &= \langle \Lambda^{-1}x | \Lambda^{-1}y \rangle + j\omega(\Lambda^{-1}x, \Lambda^{-1}y) = \langle x|y \rangle_{\mathbb{H}}.\end{aligned}$$

Tym samym wykazaliśmy, że grupa  $\text{Sp}(n)$  jest izomorficzna z grupą kwaternionowych macierzy  $n \times n$  zachowujących kwaternionowy iloczyn skalarny  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY EUKLIDESOWE)

**Grupą euklidesową**  $E(n)$  nazywamy grupę izometrii przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ . Aby przekonać się, że jest ona macierzową grupą Liego potrzebujemy kilku faktów:

- ❶ niech  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Wówczas  $\xi \in \mathbb{R}^n$  spełnia  $\|\xi - x\| + \|\xi - y\| = \|y - x\|$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $t \in [0, 1]$  takie, że  $\xi = tx + (1 - t)y$ .
- ❷ Niech  $T$  będzie izometrią  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  taką, że  $T(0) = 0$ . Wtedy  $T$  jest odwzorowaniem liniowym zachowującym iloczyn skalarny, tj.  $T \in O(n)$ .
- ❸ Niech  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  będzie izometrią. Wówczas istnieje  $T \in O(n)$  oraz wektor  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  takie, że

$$F(x) = Tx + x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

## PRZYKŁAD (GRUPY EUKLIDESOWE)

Ad ❶. Teza jest oczywista jeśli  $x = y$ . Możemy zatem rozważać tylko przypadek  $x \neq y$ .

Jest jasne, że wektory postaci  $\xi = tx + (1 - t)y$  dla  $t \in [0, 1]$  spełniają  $\|\xi - x\| + \|\xi - y\| = \|y - x\|$ . Z drugiej strony, jeśli równość ta jest spełniona dla pewnego  $\xi$ , to

$$\|\xi - x\|^2 + \|\xi - y\|^2 + 2\|\xi - x\|\|\xi - y\| = \|y - x\|^2.$$

Ale

$$\begin{aligned}\|y - x\|^2 &= \|(\xi - x) - (\xi - y)\|^2 = \langle (\xi - x) - (\xi - y) | (\xi - x) - (\xi - y) \rangle \\ &= \|\xi - x\|^2 + \|\xi - y\|^2 - 2\langle \xi - y | \xi - x \rangle,\end{aligned}$$

a więc  $\langle \xi - y | \xi - x \rangle = -\|\xi - x\|\|\xi - y\|$ . W szczególności  $|\langle \xi - x | \xi - y \rangle| = \|\xi - x\|\|\xi - y\|$ , co implikuje proporcjonalność wektorów  $\xi - x$  i  $\xi - y$ , tj. mamy  $\xi - x = \lambda(\xi - y)$  dla pewnej liczby  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  (bo  $x \neq y$ ).

## PRZYKŁAD (GRUPY EUKLIDESOWE)

Innymi słowy

$$\xi = tx + (1 - t)y$$

dla  $t = \frac{1}{1-\lambda}$ . W takim razie  $\xi - x = (1 - t)(y - x)$  oraz  $\xi - y = t(x - y)$ , a więc

$$\|\xi - x\| + \|\xi - y\| = (|t| + |1 - t|)\|y - x\|.$$

Oznacza to, że  $|t| + |1 - t| = 1$ , a zatem  $t \in [0, 1]$ .

Ad ②. Odwzorowanie  $T$  zachowuje odległości punktów: dla dowolnych  $\eta, \zeta \in \mathbb{R}^n$  mamy  $\|T(\eta) - T(\zeta)\| = \|\eta - \zeta\|$ . Weźmy  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, 1]$  i niech  $\xi = tx + (1 - t)y$ . Wtedy

$$\|T(\xi) - T(x)\| + \|T(\xi) - T(y)\| = \|\xi - x\| + \|\xi - y\| = \|y - x\| = \|T(x) - T(y)\|,$$

a więc  $T(\xi) = t'T(x) + (1 - t')T(y)$  dla pewnego  $t' \in [0, 1]$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY EUKLIDESOWE)

Oczywiście

$$t\|x - y\| = \|\xi - y\| = \|T(\xi) - T(y)\| = t'\|T(x) - T(y)\| = t'\|x - y\|,$$

więc  $t' = t$ . Otrzymujemy więc

$$T(tx + (1 - t)y) = tT(x) + (1 - t)T(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, 1]. \quad (\spadesuit)$$

Podstawiając  $y = -x$  i  $t = \frac{1}{2}$  w  $(\spadesuit)$  otrzymujemy

$$T(0) = \frac{1}{2}(T(x) + (T(-x))),$$

a skoro  $T(0) = 0$ , to

$$T(-x) = -T(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\clubsuit)$$

## PRZYKŁAD (GRUPY EUKLIDESOWE)

Wreszcie, jeśli  $\alpha > 0$ , to

- gdy  $\alpha \leq 1$ : podstawiając  $t = \alpha$ ,  $y = 0$  w (♠) dostajemy

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) + (1 - \alpha)T(0) = \alpha T(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

- gdy  $\alpha > 1$ : podstawiając  $t = \frac{1}{\alpha}$  oraz  $\alpha x$  w miejsce  $x$ , a  $0$  w miejsce  $y$  we wzorze (♠) otrzymujemy

$$T(x) = \frac{1}{\alpha}T(\alpha x) + (1 - \frac{1}{\alpha})T(0) = \frac{1}{\alpha}T(\alpha x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Oznacza to, że odwzorowanie  $T$  jest dodatnio jednorodne, a w połączeniu z (♣) otrzymujemy

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}.$$

## PRZYKŁAD (GRUPY EUKLIDESOWE)

Razem z (♠), ostatni wzór pokazuje, że  $T$  jest odwzorowaniem liniowym. W szczególności  $T$  jest odwzorowaniem odwracalnym (jądro operatora izometrycznego jest trywialne) i zachowuje iloczyn skalarny na mocy tożsamości polaryzacyjnej:

$$\langle Tx | Ty \rangle = \frac{1}{2}(\|Tx\|^2 + \|Ty\|^2 - \|T(x - y)\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|(x - y)\|^2) = \langle x | y \rangle$$

dla wszystkich  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Ad ③. Niech  $x_0 = F(0)$  i zdefiniujemy  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  kładąc

$$T(x) = F(x) - x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wówczas  $T$  jest izometrią i  $T(0) = 0$ , czyli  $T \in O(n)$  na mocy punktu ② i mamy  $F(x) = Tx + x_0$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## PRZYKŁAD (GRUPY EUKLIDESOWE)

Teraz rozważmy grupę rzeczywistych macierzy rozmiaru  $(n + 1) \times (n + 1)$  postaci

$$\begin{bmatrix} T & x_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie  $T \in O(n)$  i  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Nietrudno sprawdzić, że grupa ta jest izomorficzna z grupą wszystkich izometrii  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , której elementy opisaliśmy powyżej. Innymi słowy możemy utożsamić  $E(n)$  z grupą macierzy i nietrudno udowodnić, że jest ona macierzową grupą Liego.

Czasem symbol  $E(n)$  i nazwa „grupa euklidesowa” zarezerwowane są dla podgrupy opisanej przez nas grupy, a mianowicie grupy macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} A & x_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie  $A \in SO(n)$ . W tym kontekście grupę  $E(n)$  nazywa się też **grupą ruchów**  $\mathbb{R}^n$ .

**PRZYKŁAD (GRUPA POINCARÉ)**

**Grupe Poincaré**  $\mathcal{P}$  można podobnie zrealizować jako macierzową grupę Liego. Jest ona izomorficzna z grupą macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} A & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie  $A \in O(3, 1)$ , a  $x \in \mathbb{R}^4$ . Nietrudno sprawdzić, że zbiór takich macierzy jest domknięty w  $GL(4, \mathbb{R})$ .

**PRZYKŁAD (GRUPA HEISENBERGA)**

**Grupą Heisenberga** nazywamy grupę  $H_3$  macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Oczywiście jest ona macierzową grupą Liego.

- Wszystkie macierzowe grupy Liego są lokalnie zwarte.
- Udowodnimy później, że wszystkie macierzowe grupy Liego są gładkimi rozmaitościami.
- Ponieważ jest jasne, że mnożenie i branie odwrotności w macierzowej grupie Liego są odwzorowaniami gładkimi, macierzowe grupy Liego są **grupami Liego**, tj. grupami, które równocześnie są gładkimi rozmaitościami i mnożenie oraz branie odwrotności są gładkie.
- Istnieją grupy Liego, które nie są macierzowymi grupami Liego.
- Jeśli  $G$  jest grupą i gładką rozmaitością, a mnożenie  $G \times G \rightarrow G$  jest gładkie, to odwzorowanie  $G \ni p \mapsto p^{-1} \in G$  automatycznie jest gładkie. Fakt ten pozwala uprościć nieco definicję grupy Liego.

- W teorii grup Liego ważne są topologiczne własności grup takie jak np. zwartość.
- Grupy  $U(n)$ ,  $O(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $SO(n)$  i  $Sp(n)$  są zwarte.
- Natomiast  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n, k)$ ,  $SO(n, k)$ ,  $U(n, k)$ ,  $SU(n, k)$ ,  $Sp(n, \mathbb{R})$ ,  $Sp(n, \mathbb{C})$ ,  $E(n)$ ,  $\mathcal{P}$  i  $H_3$  nie są zwarte.

- Ponieważ macierzowe grupy Liego są rozmaitościami, spójność macierzowej grupy Liego jest równoważna jej łukowej spójności.
- Spójne są grupy  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{C})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $U(n, k)$ ,  $SU(n, k)$ ,  $Sp(n, \mathbb{C})$ ,  $Sp(n, \mathbb{R})$ ,  $Sp(n)$  i  $H_3$ .
- Grupy  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n)$ ,  $SO(n, k)$  i  $E(n)$  mają po dwie spójne składowe.
- Natomiast grupy  $O(n, k)$  i  $\mathcal{P}$  mają po cztery spójne składowe.
- Dla dowolnej grupy topologicznej  $G$  niech  $G^\circ$  oznacza jej spójną składową zawierającą element neutralny. Jeśli  $G$  jest grupą Liego,  $G^\circ$  jest składową łukowej spójności.
- W szczególności  $G^\circ$  jest otwartą i domkniętą podgrupą w  $G$ .

## STWIERDZENIE

Niech  $G$  będzie macierzową grupą Liego. Wówczas  $G^\circ$  jest spójną macierzową grupą Liego. Ponadto  $G^\circ$  jest normalną podgrupą  $G$ .

## DOWÓD

Niech  $a, b \in G^\circ$ . Wówczas istnieją drogi  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow G^\circ$  takie, że

$$\alpha(0) = \beta(0) = e, \quad \alpha(1) = a, \quad \beta(1) = b.$$

Droga  $[0, 1] \ni t \mapsto \alpha(t)^{-1}\beta(t)$  jest ciągła i łączy  $e$  z  $a^{-1}b$ , a więc  $G^\circ$  jest podzbiorem  $G$  zawierającym  $e$  i zamkniętym na operację  $a \mapsto a^{-1}$  oraz mnożenie w  $G$ . Poza tym  $G^\circ$  jest domkniętym podzbiorem  $G$ , a więc jest macierzową grupą Liego.

Teraz niech  $a \in G^\circ$ ,  $s \in G$  i niech  $\alpha$  będzie drogą jak wyżej. Wówczas droga  $[0, 1] \ni t \mapsto s\alpha(t)s^{-1} \in G$  jest ciągła i łączy  $e$  z  $sas^{-1}$ , czyli  $sas^{-1} \in G^\circ$ . W świetle dowolności  $s$  i  $a$ , pokazuje to, że  $G^\circ$  jest podgrupą normalną. □

- Spójna przestrzeń topologiczna  $X$  jest **jednospójna**, jeśli każda pętla w  $X$  jest ściągalna: dla każdego ciągłego odwzorowania  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  o tej własności, że  $\alpha(0) = \alpha(1)$  istnieje ciągłe  $h: [0, 1]^2 \rightarrow X$  takie, że dla każdego  $s \in [0, 1]$  mamy  $h(s, 0) = h(s, 1)$ , a dla każdego  $t \in [0, 1]$

$$h(0, t) = h(0, 0) \quad \text{oraz} \quad h(1, t) = \alpha(t).$$

- Odwzorowanie  $h$  takie jak wyżej nazywamy **homotopią** pętli  $\alpha$  do punktu  $x_0$ .
- Przykładem jednospójnej macierzowej grupy Liego jest  $SU(2)$  — wiemy, że  $SU(2)$  jest homeomorficzna z trójwymiarową sferą  $\mathbb{S}^3$ , a wszystkie sfery wymiaru ściśle większego niż 1 są jednospójne.
- Grupa  $SO(3)$  nie jest jednospójna (wynika to istnienia nakrycia  $\Phi: SU(2) \rightarrow SO(3)$  o dwuelementowym jądrze i tzw. twierdzenia o podnoszeniu homotopii).

- Jednospójne są grupy  $\mathrm{Sp}(n)$ ,  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathrm{SU}(n)$  i  $\mathrm{H}_3$ .
- Natomiast nie są jednospójne grupy  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^\circ$ ,  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathrm{U}(n, k)$ ,  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ ,  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathrm{U}(n)$ ,  $\mathrm{SU}(n, k)$ ,  $\mathrm{O}(n)^\circ = \mathrm{SO}(n)$ ,  $\mathrm{O}(n, k)^\circ$ ,  $\mathrm{SO}(n, k)^\circ$  i  $\mathrm{E}(n)^\circ$ .

## DEFINICJA

Niech  $G$  i  $H$  będą macierzowymi grupami Liego. Powiemy, że  $\psi: G \rightarrow H$  jest **homomorfizmem grup Liego**, jeśli  $\psi$  jest homomorfizmem grup i  $\psi$  jest ciągły.

- Wykażemy później, że każdy ciągły homomorfizm grup Liego jest odwzorowaniem gładkim.
- Nie sposób wskazać przykładu homomorfizmu pomiędzy macierzowymi grupami Liego, który nie byłby ciągły (np. nieciągły homomorfizm  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$  nie może być funkcją mierzalną).
- Wszystkie homomorfizmy omawiane w pierwszym semestrze są ciągłe.