

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 2.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Niech $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Symbolem $\sigma(A)$ oznaczać będziemy **widmo** lub **spektrum** macierzy A , tj. zbiór jej wartości własnych.
- Dla dowolnego domkniętego podzbioru $C \subset \mathbb{C}$ niech $\text{Hol}(C)$ oznacza zbiór funkcji holomorficznych na pewnym otoczeniu C (każda funkcja może być zdefiniowana na innym otoczeniu C).
- Dla $f \in \text{Hol}(\sigma(A))$ kładziemy

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta \mathbb{1} - A)^{-1} d\zeta,$$

gdzie Γ jest dodatnio zorientowanym konturem leżącym w obszarze holomorficzności f otaczającym $\sigma(A)$.

- Jeśli Γ' jest innym konturem otaczającym $\sigma(A)$, to

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta \mathbb{1} - A)^{-1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\zeta)(\zeta \mathbb{1} - A)^{-1} d\zeta$$

jest całką z funkcji holomorficznej po konturze ściągającym w dziedzinie holomorficzności f . Wynika stąd, że definicja $f(A)$ nie zależy od wyboru konturu Γ .

STWIERDZENIE

Jeśli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, to $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$.

Dowód

Zacznijmy od przypadku $f(z) = z^m$. Niech Γ będzie okręgiem o środku w zerze i promieniu $r > \|A\|$ z dodatnią orientacją. Dla $\lambda \in \Gamma$ mamy

$$(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda}A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n$$

(szereg jest zbieżny, gdyż $\|\frac{1}{\lambda}A\| < 1$). Stąd

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda^{m-n-1} A^n d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda^{m-n-1} d\lambda \right) A^n = A^m.$$

Skoro odwzorowanie $f \mapsto f(A)$ jest ewidentnie liniowe, jeśli f jest funkcją wielomianową: $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n$, to

$$f(A) = \alpha_0 \mathbb{1} + \alpha_1 A + \dots + \alpha_n A^n.$$

Wreszcie jeśli f jest sumą szeregu potęgowego, to f jest granicą (jednostajną na Γ) ciągu wielomianów, a odwzorowanie $f \mapsto f(A)$ jest ciągłe w normie $\|\cdot\|_{\infty}$. □

TWIERDZENIE

Odwzorowanie $\text{Hol}(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ jest multiplikatywne.

DOWÓD

Niech $f, g \in \text{Hol}(\sigma(A))$ i niech Γ i Γ' będą konturami otaczającymi $\sigma(A)$ leżącymi w dziedzinie f i g takimi, że Γ' leży na zewnątrz Γ . Korzystając ze wzoru rezolwentowego:

$$(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} - (\mu \mathbb{1} - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1}(\mu \mathbb{1} - A)^{-1}$$

obliczamy:

$$\begin{aligned} f(A)g(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left(\oint_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda\right) \left(\oint_{\Gamma'} g(\mu)(\mu \mathbb{1} - A)^{-1} d\mu\right) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} f(\lambda)g(\mu)(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1}(\mu \mathbb{1} - A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} ((\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} - (\mu \mathbb{1} - A)^{-1}) d\mu d\lambda \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\mu d\lambda - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\mu \mathbb{1} - A)^{-1} d\mu d\lambda. \end{aligned}$$

TWIERDZENIE

Odwzorowanie $\text{Hol}(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ jest multiplikatywne.

DOWÓD

Kontynuujemy rachunek

$$\begin{aligned}
 f(A)g(A) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} \left(\oint_{\Gamma'} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \right) d\lambda - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma'} g(\mu)(\mu \mathbb{1} - A)^{-1} \overbrace{\left(\oint_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda} d\lambda \right)}^{=0} d\mu \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} \left(\oint_{\Gamma'} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu \right) (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda)g(\lambda)(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda = (fg)(A).
 \end{aligned}$$

przy czym wskazana całka jest równa zero, gdyż $\mu \in \Gamma'$, a Γ leży wewnątrz Γ' , czyli całkujemy funkcję holomorficzną po konturze ściągającym w jej dziedzinie. $\square$

STWIERDZENIE

Niech $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ i niech $f \in \text{Hol}(\sigma(A))$. Wówczas $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Dowód

Weźmy $\mu \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(A))$. Wówczas funkcja $h_\mu: \lambda \mapsto (\mu - f(\lambda))^{-1}$ jest holomorficzna na otoczeniu $\sigma(A)$ i mamy

$$h_\mu(A)(\mu \mathbb{1} - f(A)) = (\mu \mathbb{1} - f(A))h_\mu(A) = \mathbb{1},$$

a co za tym idzie $\mu \notin \sigma(f(A))$. Innymi słowy $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$.

Teraz niech $\mu \in f(\sigma(A))$. Wtedy istnieje $\lambda_0 \in \sigma(A)$ taka, że $\mu = f(\lambda_0)$ i mamy

$$\mu - f(\lambda) = f(\lambda_0) - f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda) \frac{f(\lambda_0) - f(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} = (\lambda_0 - \lambda)g(\lambda), \quad (\diamond)$$

gdzie

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{f(\lambda_0) - f(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} & \lambda \neq \lambda_0, \\ f'(\lambda_0) & \lambda = \lambda_0 \end{cases}.$$

STWIERDZENIE

Niech $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ i niech $f \in \text{Hol}(\sigma(A))$. Wówczas $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

Dowód

Zauważmy też, że funkcja g należy do $\text{Hol}(\sigma(x))$. Dalej stosując obie strony $(\diamond)$ do A otrzymujemy

$$\mu \mathbb{1} - f(A) = (\lambda_0 \mathbb{1} - A)g(A).$$

Jeśli macierz $\mu \mathbb{1} - f(A)$ byłaby odwracalna, to odwracalna musiałaby być także macierz $\lambda_0 \mathbb{1} - A$, ponieważ $\lambda_0 \mathbb{1} - A$ i $g(A)$ komutują. Ale $\lambda_0 \in \sigma(A)$, a stąd $\mu \in \sigma(f(A))$. Tym samym wykazaliśmy, że $f(\sigma(A)) \subset \sigma(f(A))$. $\square$

TWIERDZENIE

Niech $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, $g \in \text{Hol}(\sigma(A))$ i $f \in \text{Hol}(\sigma(g(A)))$. Wtedy $f(g(A)) = (f \circ g)(A)$.

DOWÓD

Niech Γ będzie dodatnio zorientowanym konturem otaczającym $\sigma(A)$ w obszarze holomorficzności funkcji g niech Γ' będzie dodatnio zorientowanym konturem w obszarze holomorficzności f otaczającym $\sigma(g(A)) = g(\sigma(A))$ i leżącym na zewnątrz $g(\Gamma)$. Dla $\mu \in \Gamma'$ niech $h_\mu(\lambda) = (\mu - g(\lambda))^{-1}$. Wtedy h_μ jest holomorficzna na otoczeniu $\sigma(A)$ i $h_\mu(A) = (\mu \mathbb{1} - g(A))^{-1}$.

Mamy więc

$$\begin{aligned} f(g(A)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\mu) (\mu \mathbb{1} - g(A))^{-1} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\mu) h_\mu(A) d\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\mu) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\mu - g(\lambda)} (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda \right) d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\mu)}{\mu - g(\lambda)} d\mu \right) (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (f \circ g)(\lambda) (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} d\lambda = (f \circ g)(A). \end{aligned}$$

□

- Dla $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ niech e^X oznacza wynik zastosowania funkcji $z \mapsto e^z$ do X .
- Jest jasne, że $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$.

STWIERDZENIE

- 1 $e^0 = \mathbb{1}$,
- 2 $e^X \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ i $(e^X)^{-1} = e^{-X}$,
- 3 dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ zachodzi $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$,
- 4 jeśli $[X, Y] = 0$, to $e^{X+Y} = e^X e^Y$,
- 5 dla dowolnej $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ zachodzi $e^{CXC^{-1}} = Ce^XC^{-1}$,
- 6 $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$.

- Odnotujmy też, że $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \ni X \mapsto e^X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ jest odwzorowaniem gładkim, którego pochodna w $0 \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ jest identycznością $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Dowód

Wzór z punktu ❶ jest oczywisty a wzór z punktu ❺ otrzymujemy natychmiast ze wstawienia CXC^{-1} do szeregu definiującego funkcję wykładniczą.

Ad ❸. Mamy $\|e^X\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|X^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|X\|^n}{n!} = e^{\|X\|}$.

Wzory z punktów ❷ i ❸ wynikają z ❹, który można udowodnić tak: jeśli $[X, Y] = 0$, to

$(X + Y)^p = \sum_{q=0}^p \frac{p!}{q!(p-q)!} X^q Y^{p-q}$, a więc

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{Y^m}{m!} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{X^q}{q!} \frac{Y^{p-q}}{(p-q)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p \frac{p!}{q!(p-q)!} X^q Y^{p-q} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (X + Y)^p = e^{X+Y}. \end{aligned}$$

□