

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 3.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

Twierdzenie (Wzór Liego-Trottera)

Niech $X, Y \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$. Wówczas $e^{X+Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} \right)^n$.

Dowód

Dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$S_n = e^{\frac{1}{n}(X+Y)}, \quad T_n = e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y}.$$

Mamy wówczas $\|S_n\| \leq e^{\frac{1}{n}(\|X\|+\|Y\|)}$ oraz $\|T_n\| \leq \|e^{\frac{1}{n}X}\| \|e^{\frac{1}{n}Y}\| \leq e^{\frac{1}{n}\|X\|} e^{\frac{1}{n}\|Y\|} = e^{\frac{1}{n}(\|X\|+\|Y\|)}$.

Zapiszmy wyrażenia S_n i T_n w postaci też

$$S_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{n^m} (X+Y)^m = \mathbb{1} + \frac{1}{n}(X+Y) + A$$

oraz

$$\begin{aligned} T_n &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} X^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{n^l} Y^l \right) = \left(\mathbb{1} + \frac{1}{n}X + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n^k} X^k \right) \left(\mathbb{1} + \frac{1}{n}Y + \sum_{l \geq 2} \frac{1}{l!} \frac{1}{n^l} Y^l \right) \\ &= (\mathbb{1} + \frac{1}{n}X + B)(\mathbb{1} + \frac{1}{n}Y + C) = \mathbb{1} + \frac{1}{n}(X+Y) + \frac{1}{n}XC + \frac{1}{n}BY + \frac{1}{n^2}XY + B + C + BC \end{aligned}$$

Dowód

Tak więc

$$\begin{aligned}
 S_n - T_n &= A - \frac{1}{n}XC - \frac{1}{n}BY - \frac{1}{n^2}XY - B - C - BC \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{m \geq 2} \frac{(X+Y)^m}{m!n^{m-2}} - \sum_{l \geq 2} \frac{XY^l}{l!n^{l-1}} - \sum_{k \geq 2} \frac{X^k Y}{k!n^{k-1}} - XY - \sum_{k \geq 2} \frac{X^k}{k!n^{k-2}} - \sum_{l \geq 2} \frac{Y^l}{l!n^{l-2}} - \left(\sum_{k \geq 2} \frac{X^k Y}{k!n^{k-1}} \right) \left(\sum_{l \geq 2} \frac{XY^l}{l!n^{l-1}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Stąd możemy oszacować $\|S_n - T_n\|$ wielkością

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n^2} \left\| \sum_{m \geq 2} \frac{(X+Y)^m}{m!n^{m-2}} - \sum_{l \geq 2} \frac{XY^l}{l!n^{l-1}} - \sum_{k \geq 2} \frac{X^k Y}{k!n^{k-1}} - XY - \sum_{k \geq 2} \frac{X^k}{k!n^{k-2}} - \sum_{l \geq 2} \frac{Y^l}{l!n^{l-2}} - \left(\sum_{k \geq 2} \frac{X^k Y}{k!n^{k-1}} \right) \left(\sum_{l \geq 2} \frac{XY^l}{l!n^{l-1}} \right) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{m \geq 2} \frac{\|X+Y\|^m}{m!n^{m-2}} + \sum_{l \geq 2} \frac{\|XY^l\|}{l!n^{l-1}} + \sum_{k \geq 2} \frac{\|X^k Y\|}{k!n^{k-1}} + \|XY\| + \sum_{k \geq 2} \frac{\|X^k\|}{k!n^{k-2}} + \sum_{l \geq 2} \frac{\|Y^l\|}{l!n^{l-2}} + \left(\sum_{k \geq 2} \frac{\|X^k Y\|}{k!n^{k-1}} \right) \left(\sum_{l \geq 2} \frac{\|XY^l\|}{l!n^{l-1}} \right) \right) \\
 &\leq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{m \geq 2} \frac{\|X+Y\|^m}{m!} + \sum_{l \geq 2} \frac{\|XY^l\|}{l!} + \sum_{k \geq 2} \frac{\|X^k Y\|}{k!} + \|XY\| + \sum_{k \geq 2} \frac{\|X^k\|}{k!} + \sum_{l \geq 2} \frac{\|Y^l\|}{l!} + \left(\sum_{k \geq 2} \frac{\|X^k Y\|}{k!} \right) \left(\sum_{l \geq 2} \frac{\|XY^l\|}{l!} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Dowód

Tym samym wykazaliśmy, że $\|S_n - T_n\| \leq \frac{\text{const.}}{n^2}$.

Korzystając z tego oszacowania oraz tożsamości

$$S_n^n - T_n^n = \sum_{r=0}^{n-1} S_n^r (S_n - T_n) T_n^{n-1-r}$$

otrzymujemy

$$\|S_n^n - T_n^n\| \leq \sum_{r=0}^{n-1} \|S_n^r\| \|S_n - T_n\| \|T_n^{n-1-r}\| \leq n \left(\max\{\|S_n\|, \|T_n\|\} \right)^{n-1} \|S_n - T_n\| \leq \frac{\text{const.}}{n},$$

a stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}(X+Y)} \right)^n = e^{X+Y}.$$

□

UWAGA

Jeśli macierze X i Y komutują, to wzór $e^X e^Y = e^{X+Y}$ wynika ze wzoru Liego-Trottera: mamy wtedy $e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} = e^{\frac{1}{n}Y} e^{\frac{1}{n}X}$ dla wszystkich n , a w konsekwencji ciąg

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto \left(e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} \right)^n \in \text{Mat}_N(\mathbb{C})$$

jest stały i równy $e^X e^Y$.

STWIERDZENIE

Niech $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Wtedy $\det e^X = e^{\text{Tr}(X)}$.

Dowód

Jeśli X jest diagonalizowalna $X = CDC^{-1}$ (i D jest macierzą diagonalną), to mamy $\det e^X = \det(Ce^D C^{-1}) = \det e^D$, a ta ostatnia macierz ma wyznacznik równy iloczynowi eksponensów wartości na diagonalu D . Iloczyn ten jest z kolei równy $e^{\text{Tr}(D)} = e^{\text{Tr}(X)}$.

W przypadku dowolnej X możemy zapisać X w postaci $X = S + N$, gdzie S jest diagonalizowalna, N nilpotentna i $[S, N] = 0$ (w odpowiedniej bazie macierz S jest diagonalna z wartościami własnymi X na diagonalu, a N ma zera wszędzie poza – ewentualnie – jedynkami nad diagonalą). W szczególności $e^X = e^S e^N = e^S$, a więc $\det e^X = \det e^S = e^{\text{Tr}(S)} = e^{\text{Tr}(X)}$. □

STWIERDZENIE

Niech $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Wówczas istnieje $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ taka, że $A = e^X$.

Dowód

Odwracalność A oznacza, że $\sigma(A)$ nie zawiera zera, a więc istnieje gałąź logarytmu holomorficzna na otoczeniu $\sigma(A)$. Niech $X = \log A$. Wtedy $A = e^X$. □

UWAGA

Funkcja $\log$ użyta w powyższym dowodzie może być różnie wybrana. Przykładowo jeśli -1 jest wartością własną A , to można wybrać $\log$ tak, aby $\log(-1) = i\pi$ lub tak, że $\log(-1) = -i\pi$ (i obie wersje funkcji $\log$ będą zgadzać się z rzeczywistym logarytmem dla liczb ściśle dodatnich). W obu przypadkach zachodzić będzie $A = e^{\log A}$.

- Aby ujednoznaczyć pojęcie logarytmu macierzy musimy najpierw ustalić funkcję $\log$ (to oznacza w szczególności ustalenie jej dziedziny).
- Standardowymi wyborami są gałęzie główne logarytmu zdefiniowane na

$$\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0], \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}.$$

- Ostatni przypadek jest o tyle wygodny, że dla z spełniających $|z - 1|$ gałąź główna logarytmu dana jest wzorem

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z - 1)^n.$$

- Ustaliwszy funkcję $\log$ (wraz z jej dziedziną $\Omega \subset \mathbb{C}$) możemy rozważyć macierze A takie, że $\sigma(A) \subset \Omega$ i dla takich macierzy oczywiście $A = e^{\log A}$.
- Zauważmy, że jeśli $\|A - \mathbb{1}\| < 1$, to $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$.

- Zajmijmy się teraz wzorem $B = \log e^B$.
- Jeśli mamy swobodę wyboru funkcji $\log$ w zależności od położenia $\sigma(e^B)$, to wzór ten obowiązuje dla każdej $B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$.
- Jednak jeśli chcemy ustalić funkcję $\log$ (wraz z dziedziną Ω), to musimy rozważać tylko takie macierze B , dla których $\sigma(e^B) \subset \Omega$.
- Przykładowo
 - jeśli $\sigma(B) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| < \pi\}$, to $\sigma(e^B) \subset \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$,
 - jeśli $\sigma(B) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Arg } z| < \frac{\pi}{2}\}$, to $\sigma(e^B) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\}$,
 - jeśli $\|B\| < \log 2$, to

$$\|e^B - \mathbb{1}\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|B\|^n}{n!} = e^{\|B\|} - 1 < 1,$$

a więc $\sigma(e^B) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$.

- W każdym z powyższych przypadków mamy $B = \log e^B$ dla odpowiedniej (i ustalonej wraz z dziedziną) funkcji $\log$.

- W praktyce najczęściej będziemy rozważać funkcję $\log$ zdefiniowaną na $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\}$.
- Dla $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ takiej, że $\|A - \mathbb{1}\| < 1$ mamy wtedy

$$\log A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (A - \mathbb{1})^n.$$

- Załóżmy, że X i Y są macierzami takimi, że $\|X\|, \|Y\| < \log 2$. Wtedy warunek $e^X = e^Y$ implikuje $X = Y$, bo

$$X = \log e^X = \log e^Y = Y,$$

gdzie funkcja $\log$ jest zdefiniowana tak jak wyżej.

LEMAT

Niech $r \leq \log 2$ i niech $\mathcal{U} = \{e^X \mid \|X\| < \frac{r}{2}\}$. Wówczas dla dowolnej macierzy $B \in \mathcal{U}$ istnieje dokładnie jedna macierz $C \in \mathcal{U}$ taka, że $B = C^2$.

Dowód

Mamy $B = e^X$ dla pewnego $X \in \text{Ball}(0, \frac{r}{2})$. Zdefiniujmy $C = e^{\frac{1}{2}X}$. Jest jasne, że $C^2 = B$ oraz $C \in \mathcal{U}$.

Teraz niech $D \in \mathcal{U}$ spełnia $D^2 = B$. Skoro $D \in \mathcal{U}$, mamy $D = e^Y$ dla pewnego $Y \in \text{Ball}(0, \frac{r}{2})$. Ponadto

$$e^{2Y} = D^2 = B = e^X.$$

Ale $2Y \in \text{Ball}(0, r) \subset \text{Ball}(0, \log 2)$, a więc $Y = \frac{1}{2}X$ i w konsekwencji $D = e^{\frac{1}{2}X} = C$. □

FAKT

Niech $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Wówczas odwzorowanie

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tX} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$$

jest gładkie i jego pochodna spełnia

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX} = e^{tX}X.$$

W szczególności $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}e^{tX} = X$.

UWAGA

Jak już wspomnieliśmy odwzorowanie $A: \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tX} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ jest ciągłe, ma wartości w $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ i spełnia $A(s+t) = A(s)A(t)$. Odwzorowanie o takich własnościach nazywamy **jednoparametrową podgrupą** w $\text{GL}(n, \mathbb{C})$.

TWIERDZENIE

Niech A będzie jednoparametrową podgrupą w $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Wówczas istnieje jedyna macierz $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ taka, że $A(t) = e^{tX}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.