

# TEORIA GRUP II – WYKŁAD 4.

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

## TWIERDZENIE

Niech  $A$  będzie jednoparametrową podgrupą w  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ . Wówczas istnieje jedyna macierz  $X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$  taka, że  $A(t) = e^{tX}$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ .

## Dowód.

Jedyność  $X$  wynika ze wzoru  $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} e^{tX} = X$ . Dla dowodu istnienia  $X$  niech  $\mathcal{U} = \{e^X \mid \|X\| < \frac{1}{2} \log 2\}$ . Ponieważ zbiór  $\mathcal{U}$  jest otwarty, a jednoparametrowa grupa  $t \mapsto A(t)$  jest ciągła, istnieje  $t_0 > 0$  takie, że  $A(t) \in \mathcal{U}$  dla  $|t| < t_0$ . Połóżmy

$$X = \frac{1}{t_0} \log A(t_0).$$

Wtedy  $t_0 X \in \text{Ball}(0, \frac{1}{2} \log 2)$  i  $e^{t_0 X} = A(t_0)$ . Dalej  $A(\frac{1}{2}t_0)$  także należy do  $\mathcal{U}$  i mamy  $A(\frac{1}{2}t_0)^2 = A(t_0)$ . Z lematu wynika więc, że  $A(\frac{1}{2}t_0) = e^{\frac{t_0}{2}X}$ .

Powtarzając powyższe rozumowanie otrzymujemy

$$A(\frac{1}{2^k}t_0) = e^{\frac{t_0}{2^k}X}, \quad k \in \mathbb{N},$$

a stąd także

$$A(\frac{m}{2^k}t_0) = A(\frac{1}{2^k}t_0)^m = e^{\frac{m}{2^k}t_0 X}, \quad k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}.$$

Z ciągłości odwzorowania  $t \mapsto A(t)$  wynika, że  $A(t) = e^{tX}$  dla wszystkich  $t \in \mathbb{R}$ . □

**UWAGA**

Zwróćmy uwagę na fakt, że powyżej wykazaliśmy, iż każdy homomorfizm grup Liego  $\mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$  jest gładki.

## DEFINICJA

Macierz  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  nazywamy **dodatnią**, jeśli  $\langle \xi | A \xi \rangle \geq 0$  dla wszystkich  $\xi \in \mathbb{C}^n$ . Jeśli  $A$  jest dodatnia i odwracalna, to mówimy że  $A$  jest **ściśle dodatnia** lub **dodatnio określona**.

## FAKTY

- ❶  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  jest dodatnia iff gdy jest  $A = A^\dagger$  i wszystkie wartości własne  $A$  są nieujemne.
- ❷  $A$  jest ściśle dodatnia iff  $A = A^\dagger$  i wszystkie wartości własne  $A$  są ściśle większe od zera. jest to równoważne temu, że dla dowolnego  $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  mamy  $\langle \xi | A \xi \rangle > 0$ .
- ❸  $A$  jest dodatnia iff  $A = C^\dagger C$  dla pewnej macierzy  $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ .
- ❹  $A$  jest ściśle dodatnia iff  $A = C^\dagger C$  dla odwracalnej macierzy  $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ .
- ❺ Każda macierz dodatnia ma dokładnie jeden dodatni pierwiastek, tj. macierz  $B$ , która jest dodatnia i spełnia  $B^2 = A$ . Oznaczamy ją symbolem  $A^{\frac{1}{2}}$ .
- ❻  $A$  jest ściśle dodatnia wtedy iff  $A^{\frac{1}{2}}$  jest ściśle dodatnia.
- ❼ Każda macierz ściśle dodatnia  $A$  jest postaci  $A = e^X$  dla jedynej samosprężonej macierzy  $X$ .

## TWIERDZENIE (ROZKŁAD BIEGUNOWY MACIERZY ODWRACALNYCH)

Niech  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ . Wówczas  $A$  można jednoznacznie zapisać w postaci  $A = UP$ , gdzie  $U$  jest unitarna, a  $P$  ściśle dodatnia. Macierze  $U$  i  $P$  w tym rozkładzie zależą w sposób ciągły od  $A$ .

## Dowód

Niech  $P = (A^\dagger A)^{\frac{1}{2}}$  i  $U = AP^{-1}$ . Wtedy  $U^\dagger U = \mathbb{1}$ , a stąd wynika, że  $U$  jest unitarna.

Teraz niech  $A = UP = VQ$  dla unitarnych  $U$  i  $V$  oraz ściśle dodatnich  $P$  i  $Q$ . Mamy  $Q^2 = (VQ)^\dagger (VQ) = A^\dagger A = (UP)^\dagger (UP) = P^2$ , a więc dodatnie macierze  $P$  i  $Q$  są pierwiastkami z  $A^\dagger A$ . Stąd  $Q = P$  i mamy  $A = UP = VP$ . Wtedy mnożąc obie strony równości  $UP = VP$  przez  $P^{-1}$  z prawej strony otrzymujemy  $U = V$ .

Macierz  $A^\dagger A$  zależy w sposób ciągły od  $A$  i obliczanie pierwiastka zachowuje ten fakt. Stąd  $P$  zależy w sposób ciągły od  $A$ , a stąd także  $U = AP^{-1}$  zależy w sposób ciągły od  $A$ . □

- Zauważmy, że powyższe twierdzenie pokazuje, że każdą  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$  możemy jednoznacznie zapisać w postaci  $A = Ue^X$  dla  $U$  unitarnej i  $X$  samosprężonej.

## STWIERDZENIE

- ❶ Każdą  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  można jednoznacznie zapisać w postaci  $A = Re^X$ , gdzie  $R \in \text{O}(n)$ , a  $X$  jest rzeczywista i symetryczna.
- ❷ Każdą  $A \in \text{SL}(n, \mathbb{C})$  można jednoznacznie zapisać w postaci  $A = Ue^X$ , gdzie  $U \in \text{SU}(n)$ , a  $X$  jest samosprężona i bezśladowa.
- ❸ Każdą  $A \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$  można jednoznacznie zapisać w postaci  $A = Re^X$ , gdzie  $R \in \text{SO}(n)$ , a  $X$  jest rzeczywista, symetryczna i bezśladowa.

- Symbolem  $\mathbb{K}$  będzie my oznaczać ciało  $\mathbb{R}$  lub  $\mathbb{C}$ .

## DEFINICJA

Algebrą Liego nad ciałem  $\mathbb{K}$  nazywamy przestrzeń wektorową  $\mathfrak{g}$  wraz z  $\mathbb{K}$ -dwuliniową operacją  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \mapsto [X, Y] \in \mathfrak{g}$  taką, że

- 1  $[Y, X] = -[X, Y]$  dla wszystkich  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,
- 2  $[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]]$  dla wszystkich  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

- Tożsamość z punktu 2 nazywamy **tożsamością Jacobiego**.
- Według szeroko przyjętej terminologii mówimy, że  $\mathfrak{g}$  jest **rzeczywista**, jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  i **zespolona**, jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## PRZYKŁAD

Przestrzeń  $\mathbb{R}^3$  z operacją  $[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x} \times \vec{y}$  jest rzeczywistą algebrą Liego.

## PRZYKŁAD

Niech  $\mathcal{A}$  będzie algebrą łączną. Wówczas dowolna podprzestrzeń  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{A}$  taka, że dla  $X, Y \in \mathfrak{g}$  mamy  $XY - YX \in \mathfrak{g}$  jest algebrą Liego z operacją  $[X, Y] = XY - YX$ . W szczególności każda algebra łączna jest w naturalny sposób algebrą Liego. Operację  $(X, Y) \mapsto XY - YX$  nazywamy często **komutatorem** elementów  $X$  i  $Y$ .

## PRZYKŁAD

Algebrą Liego jest zatem przestrzeń  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  z komutatorem. W tym kontekście zamiast  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  piszemy  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Analogicznie piszemy  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$  na oznaczenie algebry Liego wszystkich macierzy  $n \times n$  o wyrazach rzeczywistych z operacją brania komutatora.

## PRZYKŁAD

Niech  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  oznacza przestrzeń macierzy  $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  takich, że  $\text{Tr}(X) = 0$ . Wówczas  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  jest zespoloną algebrą Liego, gdyż ślad komutatora jest zawsze równy zero. Podobnie zbiór  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  rzeczywistych macierzy bezśladowych rozmiaru  $n \times n$  jest rzeczywistą algebrą Liego.

## DEFINICJA

Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego. Podprzestrzeń  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  nazywamy **podalgebrą Liego** algebry Liego  $\mathfrak{g}$ , jeśli dla dowolnych  $X, Y \in \mathfrak{h}$  mamy  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ . Powiemy, że  $\mathfrak{h}$  jest **ideałem** w  $\mathfrak{g}$ , jeśli dla dowolnego  $X \in \mathfrak{h}$  i  $Y \in \mathfrak{g}$  mamy  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ .

## PRZYKŁADY

Jest jasne, że  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  jest podalgebrą w  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ . Co więcej  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  jest ideałem w  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$  gdyż komutator dowolnych dwóch macierzy (w szczególności, gdy jedna z nich jest bezśladowa) ma ślad zero.

## DEFINICJA

**Centrum** algebry Liego  $\mathfrak{g}$  jest to zbiór  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \text{ dla wszystkich } Y \in \mathfrak{g}\}$ . Powiemy, że algebra Liego  $\mathfrak{g}$  jest **przemienna** (lub **abelowa**), jeśli  $[X, Y] = 0$  dla wszystkich  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , tj.  $\mathfrak{g}$  jest równa swojemu centrum.

- Niech  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{h}$  będą algebrami Liego.
- Na przestrzeni  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  definiujemy operację

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], [Y_1, Y_2]).$$

- Nietrudno się przekonać, że w ten sposób  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  staje się algebrą Liego. Algebrę tę nazywamy **sumą prostą** algebr  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{h}$ . Obrazy  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{h}$  w  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  są ideałami.

- Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego i wybierzmy pewną bazę  $\{X_1, \dots, X_n\}$  przestrzeni  $\mathfrak{g}$ .
- Skalary  $\{c_{ij}^k\}_{i,j,k=1,\dots,n}$  takie, że

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k$$

dla dowolnych  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  nazywamy **stałymi struktury** algebry Liego  $\mathfrak{g}$  względem bazy  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .

- Można sprawdzić, że stałe struktury spełniają następujące warunki:

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n (c_{ij}^k c_{k,p}^q + c_{jp}^k c_{k,i}^q + c_{pi}^k c_{k,j}^q) = 0$$

(dla dowolnych wszystkich wolnych wskaźników).

## DEFINICJA

Niech  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{h}$  będą algebrami Liego. Odwzorowanie liniowe  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  nazywamy **homomorfizmem algebr Liego**, jeśli

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$$

dla wszystkich  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Powiemy, że homomorfizm algebr Liego  $\phi$  jest **izomorfizmem algebr Liego**, jeśli  $\phi$  jest bijekcją, a izomorfizm algebr Liego  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  nazywamy **automorfizmem algebry Liego**  $\mathfrak{g}$ .

## PRZYKŁAD

Niech  $\mathfrak{g}$  będzie algebrą Liego i niech  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  oznacza przestrzeń wszystkich odwzorowań liniowych  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Ponieważ  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  jest algebrą łączną, operacja brania komutatora wyposaża  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  w strukturę algebry Liego. Zdefiniujmy  $\text{ad}: \mathfrak{g} \ni X \mapsto \text{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  wzorem

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y], \quad Y \in \mathfrak{g}.$$

Wówczas  $\text{ad}$  jest homomorfizmem algebr Liego. Odwzorowanie to nazywamy **reprezentacją dołączoną** algebry  $\mathfrak{g}$ .