

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 5.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Niech $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego.
- Niech $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ oznacza zbiór formalnych kombinacji liniowych postaci $X_1 + iX_2$, gdzie $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$.
- Zbiór $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ jest w naturalny sposób zespoloną przestrzenią wektorową:

$$(X_1 + iX_2) + (Y_1 + iY_2) = (X_1 + Y_1) + i(X_2 + Y_2), \quad (a + ib)(X_1 + iX_2) = (aX_1 - bX_2) + i(bX_1 + aX_2).$$

- Nietrudno też sprawdzić, że wzór

$$[X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2] = ([X_1, Y_1] - [X_2, Y_2]) + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1])$$

definiuje na $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ strukturę zespolonej algebry Liego.

- Algebrę Liego $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ nazywamy **kompleksyfikacją** rzeczywistej algebry Liego $\mathfrak{g}$.

STWIERDZENIE

Niech $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ będzie rzeczywistą podalgebrą Liego. Jeśli dla każdego $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ mamy $iX \notin \mathfrak{g}$, to zbiór

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \{X + iY \mid X, Y, \in \mathfrak{g}\}$$

jest zespoloną podalgebrą Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ izomorficzną z $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Dowód.

Odwzorowanie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ przeprowadzające formalną kombinację $X_1 + iX_2$ ($X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$) na faktyczną kombinację liniową macierzy $X_1 + iX_2 \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ jest ewidentnie izomorfizmem przestrzeni wektorowych nad $\mathbb{C}$ (na mocy założenia, odwzorowanie to jest iniektywne, a suriektywne jest z definicji zbioru $\widetilde{\mathfrak{g}}$) i nietrudno się przekonać, że jest ono też homomorfizmem algebr Liego. $\square$

PRZYKŁADY

$$\textcircled{1} \quad \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$\textcircled{2} \quad \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}),$$

$$\textcircled{3} \quad \mathfrak{su}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}),$$

$$\textcircled{4} \quad \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}),$$

$$\textcircled{5} \quad \mathfrak{so}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}),$$

$$\textcircled{6} \quad \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}),$$

$$\textcircled{7} \quad \mathfrak{sp}(n)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}).$$

$$\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^{\dagger} = -X\}$$

$$\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^{\dagger} = -X, \operatorname{Tr}(X) = 0\}$$

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X^{\top} = -X\}$$

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^{\top} = -X\}$$

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R}) \mid \Omega X^{\top} \Omega = X\}$$

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid \Omega X^{\top} \Omega = X\}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$$

- Zauważmy, że każdą algebrę Liego $\mathfrak{g}$ możemy uważać za (rzeczywistą) podalgebrę algebry Liego $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

TWIERDZENIE

Niech $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego, a $\mathfrak{h}$ zespoloną algebrą Liego. Wówczas dowolny $\mathbb{R}$ -liniowy homomorfizm algebr Liego $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ rozszerza się jednoznacznie do $\mathbb{C}$ -liniowego homomorfizmu $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{h}$.

DEFINICJA

Powiemy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest **prosta**, jeśli jedynymi ideałami w $\mathfrak{g}$ są $\{0\}$ i $\mathfrak{g}$ oraz $\mathfrak{g}$ nie jest jednowymiarowa.

- Algebra jednowymiarowa ma oczywiście tę własność, że jedynymi jej ideałami są $\{0\}$ i cała algebra. Jednak algebra jednowymiarowa jest automatycznie przemienna, a proste algebry Liego nie są przemienne.
- Innymi słowy algebra $\mathfrak{g}$ jest prosta iff $\mathfrak{g}$ jest nieprzemienna i jedynymi ideałami w $\mathfrak{g}$ są $\{0\}$ i $\mathfrak{g}$.

STWIERDZENIE

Algebra Liego $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ jest prosta.

SZKIC DOWODU

Rozważmy następującą bazę $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wtedy zachodzą następujące relacje: $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$.

Niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem w $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ i niech $Z = \alpha X + \beta Y + \gamma H$ będzie niezerowym elementem $\mathfrak{h}$.

Wtedy jeśli $\beta \neq 0$, to

$$\mathfrak{h} \ni [X, [X, Z]] = [X, \beta H - 2\gamma X] = -2\beta X,$$

a więc $X \in \mathfrak{h}$. Dalej, skoro $\mathfrak{h}$ jest ideałem, mamy $H = [Y, X] \in \mathfrak{h}$ i wreszcie $2Y = [Y, H] \in \mathfrak{h}$, a więc wszystkie elementy bazy należą do $\mathfrak{h}$. Analogicznie pokazujemy, że $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ w przypadkach $\gamma \neq 0$ i $\alpha \neq 0$. □

- Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego.
- Symbolem $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ oznaczamy podprzestrzeń rozpinaną przez elementy postaci $[X, Y]$ ($X, Y \in \mathfrak{g}$).
- Nietrudno się przekonać, że $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$.

DEFINICJA

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego i oznaczmy $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, a dalej indukcyjnie

$$\mathfrak{g}_{n+1} = [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n], \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Ciąg $(\mathfrak{g}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ nazywamy **ciągami pochodnym** algebry $\mathfrak{g}$. Powiemy, że $\mathfrak{g}$ jest **rozwiązalna**, jeśli istnieje k takie, że $\mathfrak{g}_k = \{0\}$.

DEFINICJA

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego i połóżmy $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ oraz

$$\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}] = \text{span}\{[X, Y] \mid X \in \mathfrak{g}_n, Y \in \mathfrak{g}\}$$

dla $n \in \mathbb{Z}_+$. Ciąg $(\mathfrak{g}^n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ nazywamy **zstępującym ciągiem centralnym** $\mathfrak{g}$. Powiemy, że algebra $\mathfrak{g}$ jest **nilpotentna**, jeśli $\mathfrak{g}^n = \{0\}$ dla pewnego n .

PRZYKŁAD

Przestrzeń $\mathfrak{h}_3$ złożona z górnótrójkątnych rzeczywistych macierzy 3×3 z zerami na diagonalu jest nilpotentną podalgebrą $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$.

PRZYKŁAD

Przestrzeń górnótrójkątnych zespolonych macierzy 2×2 jest rozwiązalną algebrą Liego, ale nie jest ona nilpotentna.

TWIERDZENIE

Niech $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ będzie macierzową grupą Liego. Wówczas zbiór

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid e^{tX} \in G \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R} \right\}$$

spełnia:

- ❶ $\mathfrak{g}$ jest rzeczywistą podalgebrą Liego algebry $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$,
- ❷ dla każdego $A \in G$ i $X \in \mathfrak{g}$ mamy $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$.

Dowód

Zacznijmy od punktu ❷. Dla wszystkich t mamy

$$e^{t(AXA^{-1})} = Ae^{tX}A^{-1} \in G,$$

a więc $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$, jeśli tylko $X \in \mathfrak{g}$.

Teraz przechodzimy do dowodu, że zbiór $\mathfrak{g}$ jest rzeczywistą podprzestrzenią wektorową w $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Po pierwsze jeśli $s \in \mathbb{R}$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $e^{t(sX)} = e^{(ts)X} \in G$, a więc $\mathfrak{g}$ jest zbiorem zamkniętym ze względu na mnożenie macierzy przez rzeczywiste skalary. Po drugie, jeśli $X, Y \in \mathfrak{g}$, to dla każdego t mamy

$$e^{t(X+Y)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t}{n}X} e^{\frac{t}{n}Y} \right)^n.$$

Co więcej mamy $e^{\frac{t}{n}X}, e^{\frac{t}{n}Y} \in G$ dla wszystkich n (bo $X, Y \in \mathfrak{g}$), a G jest domkniętą podgrupą $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, a zatem $e^{t(X+Y)} \in G$.

Dowód

Aby udowodnić, że dla $X, Y \in \mathfrak{g}$ mamy $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ różniczkujemy krzywą $t \mapsto e^{tX} Y e^{-tX}$ leżącą w $\mathfrak{g}$ na mocy punktu 2. Mamy

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (e^{tX} Y e^{-tX}) = (X e^0 Y)(e^{-0}) + (e^0 Y)(-X e^{-0}) = XY - YX.$$

Tym samym wykazaliśmy, że

$$[X, Y] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hX} Y e^{-hX} - Y}{h},$$

a skoro Y i $e^{hX} Y e^{-hX}$ należą do podprzestrzeni $\mathfrak{g}$, powyższa granica także należy do $\mathfrak{g}$. Tym samym wykazaliśmy, że $\mathfrak{g}$ jest rzeczywistą podalgebrą Liego w $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. $\square$

DEFINICJA

Niech G będzie macierzową grupą Liego. Algebrę Liego $\mathfrak{g}$ zdefiniowaną w poprzednim stwierdzeniu nazywamy **algebrą Liego macierzowej grupy Liego G** .

- Jeśli $\mathfrak{g}$ jest zespoloną podprzestrzenią wektorową $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, to mówimy, że macierzowa grupa Liego jest **zespolona**.
- Przykładami zespolonych grup Liego są $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$.
- Jeśli G jest przemienna, to $\mathfrak{g}$ jest przemienna: dla $X, Y \in \mathfrak{g}$ mamy

$$[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{tX} e^{sY} e^{-tX} \right),$$

a jeśli G jest przemienna, to funkcja $t \mapsto e^{tX} e^{sY} e^{-tX}$ jest stała.

- Zauważmy też, że jeśli G i H są macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$, to jeśli $H \leq G$, to $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$.

PRZYKŁAD

Algebrą Liego grupy $GL(n, \mathbb{C})$ jest $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Istotnie, wiemy, że dla dowolnej $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ i każdego $t \in \mathbb{R}$ macierz e^{tX} jest odwracalna, a więc należy do $GL(n, \mathbb{C})$.

PRZYKŁAD

Algebrą Liego grupy $GL(n, \mathbb{R})$ jest $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Oczywiście jeśli $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, to macierz e^{tX} jest odwracalna i rzeczywista dla wszystkich t , a więc $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ zawiera się w algebrze Liego grupy $GL(n, \mathbb{R})$. Z drugiej strony, jeśli e^{tX} jest macierzą rzeczywistą dla wszystkich t , to $X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX}$ także jest rzeczywista.

PRZYKŁAD

Algebrą Liego grupy $SL(n, \mathbb{C})$ jest $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Jeśli X należy do algebry Liego grupy $SL(n, \mathbb{C})$, to $\det e^{tX} = 1$ dla wszystkich t . W szczególności $1 = \det e^X = e^{\text{Tr} X}$, a więc $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Odwrotnie, jeśli $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, to oczywiście $e^{tX} \in SL(n, \mathbb{C})$ dla wszystkich t .

PRZYKŁAD

Algebrą Liego grupy $SL(n, \mathbb{R})$ jest $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Wynika to natychmiast z powtórzenia rozumowania pokazującego, że algebrą Liego grupy $GL(n, \mathbb{R})$ jest $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ dla macierzy o zerowym śladzie.

PRZYKŁAD

Algebrą Liego grupy $U(n)$ jest $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X^\dagger = -X\}$, a algebrą Liego grupy $O(n)$ jest $\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X^\top = -X\}$. Ta ostatnia jest także algebrą Liego grupy $SO(n)$ i dlatego często oznacza się ją również symbolem $\mathfrak{so}(n)$.

Aby się o tym przekonać zauważmy najpierw, że macierz e^{tX} jest unitarna iff $(e^{tX})^\dagger = (e^{tX})^{-1}$. Co więcej $(e^{tX})^\dagger = e^{tX^\dagger}$, więc musi być $e^{tX^\dagger} = e^{-tX}$ dla wszystkich t . Biorąc pochodną obu stron tej równości w $t = 0$ otrzymujemy $X^\dagger = -X$. Nietrudno też się przekonać, że jeśli $X^\dagger = -X$, to $e^{tX} \in U(n)$ dla wszystkich t .

Analogicznie dowodzimy, że $\mathfrak{o}(n)$ jest algebrą Liego grupy $O(n)$. Ponieważ z warunku $X^\top = -X$ wynika, że $\text{Tr}(tX) = 0$ dla wszystkich t , widzimy, że $e^{tX} \in SO(n)$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{o}(n)$, czyli $\mathfrak{o}(n)$ zawiera się w algebrze Liego grupy $SO(n)$. Przeciwnie zawieranie jest oczywiste.

PRZYKŁAD

Niech g będzie macierzą niezdegenerowanej symetrycznej formy dwuliniowej na $\mathbb{R}^{n+k}$ o sygnaturze (n, k) . Algebrą Liego grupy $O(n, k)$ jest

$$\mathfrak{o}(n, k) = \left\{ X \in \text{Mat}_{n+k}(\mathbb{R}) \mid gX^T g = -X \right\}.$$

Jest ona identyczna z algebrą Liego grupy $SO(n, k)$.

PRZYKŁAD

Niech

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{bmatrix} \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{R}).$$

- Algebrą Liego grupy $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ jest $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \left\{ X \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \Omega X^T \Omega = X \right\}$.
- Algebrą Liego grupy $\text{Sp}(n, \mathbb{C})$ jest $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \left\{ X \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{C}) \mid \Omega X^T \Omega = X \right\}$.
- Algebrą Liego grupy $\text{Sp}(n)$ jest $\mathfrak{sp}(n) = \left\{ X \in \text{Mat}_{2n}(\mathbb{C}) \mid \Omega X^T \Omega = X \text{ i } X^\dagger = -X \right\}$.

PRZYKŁAD

Algebrą Liego grupy Heisenberga H_3 jest

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

PRZYKŁAD

Przykładową bazą algebry Liego $\mathfrak{su}(2)$ jest $\{E_1, E_2, E_3\}$:

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Relacje komutacji pomiędzy tymi macierzami wyglądają tak:

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2.$$

Natomiast przykładem bazy $\mathfrak{so}(3)$ jest $\{F_1, F_2, F_3\}$, gdzie

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mamy też

$$[F_1, F_2] = F_3, \quad [F_2, F_3] = F_1, \quad [F_3, F_1] = F_2.$$

Nietrudno się przekonać, że odwzorowanie liniowe ϕ przeprowadzające E_i na F_i ($i = 1, 2, 3$) jest izomorfizmem algebr Liego.