

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 6.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE

Niech G i H będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Niech $\Phi: G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem grup Liego. Wówczas istnieje dokładnie jedno $\mathbb{R}$ -liniowe odwzorowanie $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ takie, że

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Odwzorowanie ϕ ma następujące własności:

- ❶ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$ i $A \in G$ mamy $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$,
- ❷ $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ dla wszystkich $X, Y \in \mathfrak{g}$,
- ❸ dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ mamy $\phi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(e^{tX})$.

Dowód

Weźmy $X \in \mathfrak{g}$. Wtedy odwzorowanie $t \mapsto \Phi(e^{tX})$ jest jednoparametrową podgrupą w H , a więc istnieje dokładnie jedna macierz $Z \in \mathfrak{h}$ taka, że $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ dla wszystkich t . Definiujemy $\phi(X) = Z$. Jest jasne, że $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$. Pokażemy, że odwzorowanie to jest $\mathbb{R}$ -liniowe.

Niech $X \in \mathfrak{g}$ i $s \in \mathbb{R}$. Wtedy $\Phi(e^{tsX}) = e^{tsZ}$ dla wszystkich t , co pokazuje, że $\phi(sX) = sZ = s\phi(X)$. Dalej, jeśli $X, Y \in \mathfrak{g}$, to dzięki ciągłości Φ mamy

$$e^{t\phi(X+Y)} = \Phi(e^{t(X+Y)}) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t}{n}X} e^{\frac{t}{n}Y}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t}{n}\phi(X)} e^{\frac{t}{n}\phi(Y)}\right)^n = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}.$$

Różniczkując tę równość w $t = 0$ otrzymujemy $\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y)$.

Przypuśćmy, że $\tilde{\phi}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ jest innym odwzorowaniem $\mathbb{R}$ -liniowym, które także spełnia $\Phi(e^X) = e^{\tilde{\phi}(X)}$. Mamy wówczas $\Phi(e^{tX}) = e^{t\tilde{\phi}(X)}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, a więc $e^{t\phi(X)} = \Phi(e^{tX}) = e^{t\tilde{\phi}(X)}$. Różniczkując tę równość w $t = 0$ otrzymujemy $\phi(X) = \tilde{\phi}(X)$ dla dowolnego X .

Dowód

Ad ❶. Dla dowolnego $A \in G$ mamy

$$\begin{aligned} e^{t\phi(AXA^{-1})} &= e^{\phi(tAXA^{-1})} = \Phi(e^{tAXA^{-1}}) = \Phi(Ae^{tX}A^{-1}) \\ &= \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A^{-1}) = \Phi(A)e^{t\phi(X)}\Phi(A^{-1}) = e^{t\Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}} \end{aligned}$$

i ponownie różniczkując w $t = 0$ otrzymujemy $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$.

Ad ❷. Weźmy $X, Y \in \mathfrak{g}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \phi([X, Y]) &= \phi\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi(e^{tX} Y e^{-tX}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(e^{tX})\phi(Y)\Phi(e^{-tX}) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)} = [\phi(X), \phi(Y)]. \end{aligned}$$

Punkt ❸ wynika z definicji odwzorowania ϕ . □

STWIERDZENIE

Niech G, H i K będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ i niech $\Phi: G \rightarrow H$ oraz $\Psi: H \rightarrow K$ będą homomorfizmami grup Liego. Niech $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ i $\psi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{k}$ będą homomorfizmami algebr Liego stowarzyszonymi z Φ i Ψ . Wówczas homomorfizmem algebr Liego $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{k}$ stowarzyszonym z $\Psi \circ \Phi$ jest $\psi \circ \phi$.

DOWÓD

Dla $X \in \mathfrak{g}$ i dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\Psi(\Phi(e^{tX})) = \Phi(e^{t\phi(X)}) = e^{t\psi(\phi(X))}.$$

□

STWIERDZENIE

Niech G i H będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ i niech $\Phi: G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem grup Liego ze stowarzyszonym homomorfizmem algebr Liego $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Niech $K = \ker \Phi$ i niech $\mathfrak{k}$ będzie algebrą Liego macierzowej grupy K . Wówczas $\mathfrak{k} = \ker \phi$.

DOWÓD

Jeśli $X \in \ker \phi$, to dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\Phi(e^{tX}) = e^{t\phi(X)} = \mathbb{1}$, a więc $X \in \mathfrak{k}$. Z drugiej strony, jeśli $X \in \mathfrak{k}$, to dla każdego t mamy

$$e^{t\phi(X)} = \Phi(e^{tX}) = \mathbb{1}$$

a więc $\phi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{t\phi(X)} = 0$.

□

PRZYKŁAD

W pierwszym semestrze konstruowaliśmy homomorfizm grup Liego $\Phi: \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ spełniający

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \Phi\left(\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

oraz

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(wzory te jednoznacznie wyznaczają Φ i dowodzą, że Φ jest epimorfizmem).

PRZYKŁAD

Przypomnijmy, że macierze Pauliego

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

spełniają

$$e^{i\alpha \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos(\alpha) \mathbb{1} + i \sin(\alpha) \vec{n} \cdot \vec{\sigma},$$

gdzie $\vec{n}$ jest wektorem w $\mathbb{R}^3$ długości 1, a $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n^1 \sigma_1 + n^2 \sigma_2 + n^3 \sigma_3$.

Niech $\phi: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ będzie homomorfizmem algebr Liego stowarzyszonym z Φ i niech $\{E_1, E_2, E_3\}$ będzie rozważaną przez nas wcześniej bazą $\mathfrak{su}(2)$. Wówczas korzystając z faktu, że $E_1 = \frac{i}{2}\sigma_1$, $E_2 = \frac{-i}{2}\sigma_2$ i $E_3 = \frac{i}{2}\sigma_3$ łatwo sprawdzamy, że

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = e^{\theta E_1}, \quad \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = e^{\theta E_2}, \quad \begin{bmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix} = e^{\theta E_3}.$$

PRZYKŁAD

Tak więc

$$\phi(E_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = F_1, \quad \phi(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = F_2, \quad \phi(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie $\{F_1, F_2, F_3\}$ jest rozważaną przez nas wcześniej bazą algebry $\mathfrak{so}(3)$.

Innymi słowy homomorfizm algebr Liego ϕ stowarzyszony z homomorfizmem grup Liego ϕ jest opisanym już wcześniej izomorfizmem $\mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$.

PRZYKŁAD

Niech G będzie macierzową grupą Liego i niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego grupy G . Grupa $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ wszystkich odwracalnych odwzorowań liniowych $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ jest ewidentnie macierzową grupą Liego, a jej algebrą Liego jest $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Co więcej odwzorowanie $\mathrm{Ad}: G \ni A \mapsto \mathrm{Ad}_A \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ dane wzorem

$$\mathrm{Ad}_A(Y) = AYA^{-1}, \quad Y \in \mathfrak{g}$$

jest homomorfizmem grup Liego, który nazywamy **reprezentacją dołączoną** grupy G .

Przyjmijmy tymczasowo oznaczenie ϕ na homomorfizm algebr Liego $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ stowarzyszony z homomorfizmem Ad .

PRZYKŁAD

Dla $X \in \mathfrak{g}$ mamy $\phi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{e^{tX}}$, a zatem dla każdego $Y \in \mathfrak{g}$

$$(\phi(X))(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX} = [X, Y] = \text{ad}_X(Y).$$

Tym samym wykazaliśmy, że $\phi = \text{ad}$, tj. homomorfizmem algebr Liego stowarzyszonym z reprezentacją dołączoną $\mathfrak{g}$ jest reprezentacja dołączona $\mathfrak{g}$. Ponadto mamy

$$e^X Y e^{-X} = \text{Ad}_{e^X}(Y) = e^{\text{ad}_X}(Y) = Y + [X, Y] + \frac{1}{2}[X, [X, Y]] + \frac{1}{6}[X, [X, [X, Y]]] + \cdots.$$

dla wszystkich $X, Y \in \mathfrak{g}$.

DEFINICJA

Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. **odwzorowaniem wykładniczym** dla grupy G nazywamy przekształcenie

$$\exp: \mathfrak{g} \ni X \mapsto e^X \in G.$$

PRZYKŁAD

Przy dyskusji rachunku funkcji holomorficznych zauważyliśmy, że każda macierz $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ jest postaci e^X dla pewnej macierzy $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Innymi słowy odwzorowanie wykładnicze dla tej grupy jest surjektywne.

PRZYKŁAD

Macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ należy do $SL(2, \mathbb{C})$, ale nie jest postaci e^X dla żadnego $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Istotnie, jeśli macierz $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ma dwie różne wartości własne, to jest diagonalizowalna, a więc e^X też jest diagonalizowalna. Tak więc A nie może być eksponentem macierzy z $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ o dwóch różnych wartościach własnych. Jednak jeśli $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ma podwójną wartość własną, wartość ta musi być równa zero, bo $\text{Tr } X = 0$. Stąd $\ker X \neq \{0\}$ i w konsekwencji e^X musi mieć wektor własny o wartości własnej 1. Jest jasne, że A takiego wektora nie ma. Tym samym wykazaliśmy, że odwzorowanie wykładnicze dla $SL(2, \mathbb{C})$ nie jest surjekcją.

TWIERDZENIE

Niech $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Wówczas istnieje otoczenie $\mathcal{V}$ punktu $\mathbb{1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ takie, że dla dowolnej $A \in \mathcal{V}$ mamy

$$(A \in G) \iff (\log A \in \mathfrak{g})$$

(przy czym $\log A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (A - \mathbb{1})^n$, w szczególności warunek $A \in \mathcal{V}$ gwarantuje zbieżność tego szeregu).

LEMAT

Niech $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów G takim, że $B_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{1}$ i niech $Y_m = \log B_m$ (dla dostatecznie dużych m). Załóżmy, że $Y_m \neq 0$ dla wszystkich m oraz że istnieje macierz $Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ taka, że $\frac{1}{\|Y_m\|} Y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Y$. Wtedy $Y \in \mathfrak{g}$.

DOWÓD LEMATU

Ustalmy $t \in \mathbb{R}$. Skoro $B_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{1}$, mamy $\|Y_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, a więc istnieje ciąg $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ liczb całkowitych taki, że $k_m \|Y_m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} t$.

Tak więc mamy

$$e^{k_m Y_m} = e^{(k_m \|Y_m\|) \frac{1}{\|Y_m\|} Y_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} e^{tY}.$$

Co więcej $e^{k_m Y_m} = (e^{Y_m})^{k_m} = B_m^{k_m} \in G$, a skoro G jest domknięta, otrzymujemy $e^{tY} \in G$. Jako że t jest w tym rozumowaniu dowolne, widzimy, że $Y \in \mathfrak{g}$. □