

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 7.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE

Niech $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Wówczas istnieje otoczenie $\mathcal{V}$ punktu $\mathbb{1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ takie, że dla dowolnej $A \in \mathcal{V}$ mamy

$$(A \in G) \iff (\log A \in \mathfrak{g})$$

(przy czym $\log A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (A - \mathbb{1})^n$, w szczególności warunek $A \in \mathcal{V}$ gwarantuje zbieżność tego szeregu).

LEMAT

Niech $(B_m)_{m \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów G takim, że $B_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{1}$ i niech $Y_m = \log B_m$ (dla dostatecznie dużych m). Załóżmy, że $Y_m \neq 0$ dla wszystkich m oraz że istnieje macierz $Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ taka, że $\frac{1}{\|Y_m\|} Y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Y$. Wtedy $Y \in \mathfrak{g}$.

DOWÓD TWIERDZENIA

Niech D będzie jakąś podprzestrzenią dopełniającą dla $\mathfrak{g}$ w $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Możemy wówczas zdefiniować gładkie odwzorowanie $\Phi: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ kładąc $\Phi(Z) = e^X e^Y$, gdzie $Z = X + Y$ jest rozkładem $Z \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ na składowe w $\mathfrak{g}$ i D . Mamy

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(tX, 0) = X \quad \text{oraz} \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(0, tY) = Y,$$

skąd wynika, że pochodną odwzorowania Φ w zerze jest identyczność $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. W konsekwencji Φ ma lokalnie – w otoczeniu $0 \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ – gładkie odwzorowanie odwrotne Ψ .

Teraz dla $\varepsilon \in]0, \log 2]$ niech $\mathcal{V}_\varepsilon = \exp(\text{Ball}(0, \varepsilon))$ (kula w $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$). Jest jasne, że dla dostatecznie małego ε zbiór $\mathcal{V}_\varepsilon$ jest otoczeniem $\mathbb{1} \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Ponadto dla $A \in \mathcal{V}_\varepsilon$ mamy $A = e^{\log A}$, gdzie funkcja $\log$ jest dana przez sumę szeregu potęgowego od $A - \mathbb{1}$. Wreszcie dla pewnego ε zbiór $\mathcal{V}_\varepsilon$ jest zawarty w dziedzinie Ψ . Ustalamy więc taki ε i przyjmujemy, że dziedziną Ψ jest $\mathcal{V}_\varepsilon$.

DOWÓD TWIERDZENIA

Przypuśćmy teraz, że nasze twierdzenie nie jest prawdziwe. Wtedy istnieje ciąg $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ elementów G taki, że $A_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{1}$ i dla każdego m mamy $\log A_m \notin \mathfrak{g}$. Przynajmniej dla dostatecznie dużych m możemy więc napisać A_m w postaci $A_m = \Phi(\Psi(A_m)) = e^{X_m} e^{Y_m}$, gdzie $(X_m, Y_m) = \Psi(A_m)$ (czyli $X_m \in \mathfrak{g}$, $Y_m \in D$). Zauważmy, że $Y_m \neq 0$, bo $Y_m = 0$ oznaczałoby $e^{\log A_m} = A_m = e^{X_m}$, a mamy $X_m, \log A_m \in \text{Ball}(0, \varepsilon)$, gdzie taki logarytm jest jedyny, podczas gdy $\log A_m \notin \mathfrak{g}$, a $X_m \in \mathfrak{g}$.

Jednak $A_m \in G$ dla wszystkich m , a zatem

$$B_m = e^{-X_m} A_m \in G$$

dla wszystkich m . Zauważmy też, że $B_m = e^{Y_m}$, czyli $Y_m = \log B_m$. Wreszcie $B_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbb{1}$, bo $(X_m, Y_m) = \Psi(A_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \Psi(\mathbb{1}) = (0, 0)$, czyli $Y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Rozważmy teraz ciąg $\left(\frac{1}{\|Y_m\|} Y_m\right)_{m \in \mathbb{N}}$. Jest to ciąg elementów sfery w D , która jest zbiorem zwartym. Stąd istnieje podciąg ciągu $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ (który nadal będziemy oznaczać $(Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$) zbieżny do pewnego $Y \in D$ spełniającego $\|Y\| = 1$. Ale na mocy lematu mamy $Y \in \mathfrak{g}$, co stoi w sprzeczności z faktem, że $D \cap \mathfrak{g} = \{0\}$. □

WNIOSEK

Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Wówczas istnieje otoczenie zera $\mathcal{U}$ w $\mathfrak{g}$ takie, że $\exp|_{\mathcal{U}}$ jest dyfeomorfizmem na otoczenie $\mathbb{1}$ w G .

DOWÓD

Niech $\mathcal{U} = \mathfrak{g} \cap \text{Ball}(0, \varepsilon)$ (kula w $\text{gl}(n, \mathbb{C})$) będzie takie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, tj. $\varepsilon \in]0, \log 2]$ i dla $A \in \exp(\text{Ball}(\varepsilon, 0))$ mamy $A \in G$ iff $\log A \in \mathfrak{g}$. Wtedy $\exp$ jest gładkim odwzorowaniem $\mathcal{U}$ na otoczenie $\mathbb{1}$ w G , które posiada gładkie odwzorowanie odwrotne dane przez macierzowy logarytm (sumę szeregu potęgowego). $\square$

WNIOSEK

Każda macierzowa grupa Liego jest gładką rozmaitością.

WNIOSEK

Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Wówczas macierz X należy do $\mathfrak{g}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje gładka krzywa $\gamma:]-\delta, \delta[\rightarrow G$ taka, że $\gamma(0) = \mathbb{1}$ i $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \gamma(t) = X$.

- Wniosek ten mówi, że $\mathfrak{g}$ jest przestrzenią styczną go rozmaitości G w $\mathbb{1}$.

DOWÓD WNIOSKU

Jeśli $X \in \mathfrak{g}$, to wystarczy wziąć $\gamma(t) = e^{tX}$. Z drugiej strony jeśli $X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t)$ dla pewnej gładkiej krzywej $\gamma:]-\delta, \delta[\rightarrow G$ przez $\mathbb{1}$, to (przynajmniej jeśli δ jest dostatecznie mała) możemy zdefiniować krzywą θ w $\mathfrak{g}$ taką, że $\theta(0) = 0$ kładąc $\theta(t) = \log \gamma(t)$. Mamy wtedy $\gamma(t) = e^{\theta(t)}$ dla wszystkich t i wartość pochodnej

$$\gamma'(t) = (\exp \circ \theta)'(t) = \exp'(\theta(t))\theta'(t)$$

w $t = 0$ jest równa $\theta'(0)$ (bo $\exp'(0)$ jest identycznością). Wreszcie skoro $\theta(t)$ należy do $\mathfrak{g}$, mamy również $\gamma'(0) \in \mathfrak{g}$. □

WNIOSEK

Niech G będzie macierzową grupą Liego. Wówczas algebry Liego grup G i G° są równe.

UWAGA 1

Każda otwarta podgrupa H grupy topologicznej G jest domknięta. Jest tak dlatego, że

$$H = G \setminus \bigcup_{p \notin H} pH$$

przy czym suma po prawej stronie jest sumą warstw otwartej podgrupy H , a więc zbiorów otwartych.

UWAGA 2

Teraz niech G będzie grupą topologiczną. Wtedy G° jest algebraicznie generowana przez dowolne otoczenie $e \in G$ zawarte w G° . Istotnie, niech $\mathcal{W}$ będzie dowolnym (otwartym) otoczeniem $e \in G^\circ$ i niech $\mathcal{U} = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{-1}$. Nietrudno się przekonać, że zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}^n$ jest podgrupą w G° . Co więcej podgrupa ta jest ewidentnie otwarta, a więc także domknięta na mocy uwagi 1. Jako zbiór domknięto-otwarty musi być ona sumą spójnych składowych, a więc musi być równa G° .

STWIERDZENIE

Niech G będzie spójną macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Wówczas każdy element $A \in G$ może być zapisany w formie $A = e^{X_1} e^{X_2} \dots e^{X_m}$ dla pewnych $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$.

Dowód

Istnieje otoczenie zera w $\mathfrak{g}$ przeprowadzane przez $\exp$ na otoczenie 1 w G . Otoczenie to algebraicznie generuje całą grupę G . □

WNIOSEK

Niech G i H będą macierzowymi grupami Liego a algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ i złożmy, że G jest spójna. Niech Φ_1 i Φ_2 będą homomorfizmami grup Liego $G \rightarrow H$ i niech $\phi_1, \phi_2: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ będą stowarzyszonymi z nimi homomorfizmami algebr Liego. Wówczas jeśli $\phi_1 = \phi_2$, to $\Phi_1 = \Phi_2$.

Dowód

Każdy element $A \in G$ możemy zapisać w postaci $A = e^{X_1} \dots e^{X_m}$ dla pewnych $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$.
Zatem

$$\begin{aligned}\Phi_2(A) &= \Phi_2(e^{X_1}) \dots \Phi_2(e^{X_m}) = e^{\phi_2(X_1)} \dots e^{\phi_2(X_m)} \\ &= e^{\phi_1(X_1)} \dots e^{\phi_1(X_m)} = \Phi_1(e^{X_1}) \dots \Phi_1(e^{X_m}) = \Phi_1(A).\end{aligned}$$

□