

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 8.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$.
- Niech $\mathcal{U}$ będzie otoczeniem zera $\mathfrak{g}$ przeprowadzanym dyfeomorficznie przez $\exp$ na otoczenie $\mathcal{V}$ punktu $\mathbb{1} \in G$.
- Wówczas odwzorowanie $\mathcal{V} \ni e^X \mapsto X \in \mathfrak{g}$ jest układem współrzędnych na $\mathcal{V}$.
- Współrzędne te nazywamy **współrzędnymi wykładniczymi**.
- Ponieważ mnożenie (np. z lewej) przez ustalony element jest dyfeomorfizmem $G \rightarrow G$, możemy przenieść współrzędne wykładnicze na otoczenie $A\mathcal{V}$ dowolnego $A \in G$.

WNIOSEK

Każdy ciągły homomorfizm pomiędzy macierzowymi grupami Liego jest gładki.

Dowód

Niech $\Phi: G \rightarrow H$ będzie ciągłym homomorfizmem pomiędzy macierzowymi grupami Liego i niech $\mathfrak{g}$ oraz $\mathfrak{h}$ będą algebrami Liego G i H . Niech $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ będzie homomorfizmem algebr Liego stowarzyszonym z Φ i oznaczmy symbolem $\mathcal{U}$ otoczenie zera w $\mathfrak{g}$ przeprowadzane dyfeomorficznie przez $\exp$ na otoczenie $\mathcal{V} = \exp(\mathcal{U})$ punktu $\mathbb{1} \in G$.

Weźmy dowolny element $A \in G$. Wówczas dla każdego $B = Ae^X \in A\mathcal{V}$ mamy

$$\Phi(B) = \Phi(A)\Phi(e^X) = \Phi(A)e^{\phi(X)}.$$

Wzór ten pokazuje, że we współrzędnych wykładniczych na pewnym otoczeniu A odwzorowanie Φ jest złożeniem odwzorowania liniowego, odwzorowania wykładniczego i mnożenia przez ustalony element grupy H . Wynika stąd, że Φ jest gładkie na otoczeniu A . □

TWIERDZENIE

Niech $X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ spełniają

$$[X, [X, Y]] = 0 = [Y, [X, Y]].$$

Wtedy $e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}.$

- Przypomnijmy, że H_3 oznacza grupę Heisenberga, tj. grupę macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Algebrą Liego H_3 jest $\mathfrak{h}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

TWIERDZENIE

Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i niech $\phi: \mathfrak{h}_3 \rightarrow \mathfrak{g}$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup Liego $\Phi: H_3 \rightarrow G$ taki, że

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$$

dla wszystkich $X \in \mathfrak{h}_3$.

DOWÓD

Najpierw udowodnimy, że dla każdego elementu $A \in H_3$ istnieje dokładnie jeden $X \in \mathfrak{h}_3$ taki, że $A = e^X$. Istotnie, ponieważ

$$\exp \left(\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & x & xz + y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dowolna macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest postaci

$$A = \exp \left(\begin{bmatrix} 1 & a & b - ac \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Co więcej, jeśli $X = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $X' = \begin{bmatrix} 0 & x' & y' \\ 0 & 0 & z' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, to $e^X = e^{X'}$ oznacza $x = x'$, $y = y'$ i $z = z'$, czyli $X = X'$.

DOWÓD

Tym samym udowodniliśmy, że grupa Heisenberga ma tę własność, że $\exp: \mathfrak{h}_3 \rightarrow H_3$ jest bijekcją. Oznaczmy bijekcję odwrotną symbolem $\log$ i zdefiniujmy

$$\Phi(A) = e^{\phi(\log A)}, \quad A \in H_3.$$

Wykażemy, że Φ jest homomorfizmem grup Liego.

Zauważmy, że jeśli $X, Y \in \mathfrak{h}_3$, to jedynym niezerowym wyrazem macierzy $[X, Y]$ może być jej prawy górny róg, a takie macierze są przemienne ze wszystkimi elementami $\mathfrak{h}_3$ (stanowią jej centrum). Dalej, skoro ϕ jest homomorfizmem algebr Liego, dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{h}_3$ mamy

$$[\phi(X), [\phi(X), \phi(Y)]] = 0 = [\phi(Y), [\phi(X), \phi(Y)]].$$

Tak więc jeśli zapiszemy $A, B \in H_3$ w postaci $A = e^X, B = e^Y$, to

$$\log(AB) = \log(e^X e^Y) = \log(e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y].$$

Dowód

Z definicji Φ

$$\Phi(AB) = e^{\phi(\log(AB))} = e^{\phi(X+Y+\frac{1}{2}[X,Y])} = e^{\phi(X)+\phi(Y)+\frac{1}{2}[\phi(X),\phi(Y)]} = e^{\phi(X)}e^{\phi(Y)} = \Phi(A)\Phi(B).$$

Odwzorowanie Φ jest ciągłe, gdyż $\exp$, $\log$ i ϕ są ciągłe. Ponadto

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}, \quad X \in \mathfrak{h}_3$$

z definicji. Wzór ten wyznacza Φ jednoznacznie, gdyż każdy element H_3 zapisuje się jednoznacznie w postaci e^X . □

- Policzmy teraz pochodną odwzorowania

$$\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \ni T \mapsto e^T \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$$

w punkcie $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ w kierunku $Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$.

- Innymi słowy granicę $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(e^{X+tY} - e^X)$, tj. $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{X+tY}$.
- Skoro $e^{X+tY} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X + tY)^n$, mamy

$$\frac{d}{dt} e^{X+tY} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt} (X + tY)^n,$$

bo szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X + tY)^n$ oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt} (X + tY)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (X + tY)^k Y (X + tY)^{n-1-k}$$

(reguła Leibnitza n razy) są zbieżne niemal jednostajnie względem t .

- W takim razie

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{X+tY} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (X+tY)^k Y (X+tY)^{n-1-k} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} X^k Y X^{n-1-k}.$$

- Zauważmy teraz, że korzystając ze wzoru na iloczyn szeregów, dla dowolnego $s \in [0, 1]$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1-s)^p}{p!} X^p \right) Y \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{s^q}{q!} X^q \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-s)^k}{k!} \frac{s^{n-k-1}}{(n-k-1)!} X^k Y X^{n-k-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} (1-s)^k s^{n-k-1} X^k Y X^{n-k-1}. \end{aligned}$$

- Teraz skoro $\int_0^1 (1-s)^k s^{n-k-1} ds = \frac{k!(n-k-1)!}{n!}$, dostajemy

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} (1-s)^k s^{n-k-1} X^k Y X^{n-k-1} ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} X^k Y X^{n-k-1},$$

czyli

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{X+tY} = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(1-s)^p}{p!} X^p \right) Y \left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{s^q}{q!} X^q \right) ds = \int_0^1 e^{(1-s)X} Y e^{sX} ds.$$

- Ostatecznie wzór na pochodną exp w punkcie X w kierunku Y wygląda tak:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{X+tY} = e^X \int_0^1 e^{-sX} Y e^{sX} ds = e^X \int_0^1 \text{Ad}_{e^{-sX}}(Y) ds.$$

- Przypomnijmy, że $\text{Ad}_{e^Z} = e^{\text{ad}_Z}$ dla wszystkich macierzy Z , a zatem pochodną $\exp$ w punkcie X jest operator

$$\int_0^1 e^{-s \text{ad}_X} ds$$

złożony z mnożeniem z lewej strony przez e^X .

- Podstawiając $e^{-s \text{ad}_X}$ w postaci szeregu potęgowego otrzymujemy

$$\int_0^1 e^{-s \text{ad}_X} ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (-s)^n (\text{ad}_X)^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\text{ad}_X)^n,$$

a stąd

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{X+tY} = e^X \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X} (Y) \right),$$

jako że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} z^n = \frac{1 - e^{-z}}{z}.$

TWIERDZENIE

Niech $X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Wtedy

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{X+tY} = e^X \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X}(Y) \right) = e^X \left(Y - \frac{1}{2!}[X, Y] + \frac{1}{3!}[X, [X, Y]] - \dots \right)$$

- Ustalmy $t_0 \in \mathbb{R}$. Wtedy korzystając ze wzoru $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} e^{X+tY} = e^X \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_X}}{\text{ad}_X}(Y) \right)$ otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0} e^{X+tY} = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} e^{(X+t_0Y)+sY} = e^{X+t_0Y} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_{X+t_0Y}}}{\text{ad}_{X+t_0Y}}(Y) \right)$$

- Innymi słowy dla $X(t) = X + tY$ mamy $\frac{d}{dt}e^{X(t)} = e^{X(t)} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_{X(t)}}}{\text{ad}_{X(t)}}(Y) \right)$.

WNIOSEK

Niech $t \mapsto X(t)$ będzie gładką funkcją o wartościach w $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$. Wówczas

$$\frac{d}{dt}e^{X(t)} = e^{X(t)} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_{X(t)}}}{\text{ad}_{X(t)}} \left(\frac{dX}{dt} \right) \right).$$

DYGRESJA

- Niech $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ będą przestrzeniami Banacha i niech $F: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ będzie funkcją różniczkowalną.
- Niech $G_1, G_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}$ też będą różniczkowalne.
- Dla $i = 1, 2$ mamy oczywiście

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (F \circ G_i)(t) = F'(G_i(t_0)) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} G_i(t),$$

a więc jeśli $G_1(t_0) = G_2(t_0)$ i $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} G_1(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} G_2(t)$, to

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (F \circ G_1)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (F \circ G_2)(t).$$

DOWÓD WNIOSKU

W przypadku $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \text{Mat}_n(\mathbb{C})$, $F = \exp$, $G_1 = X$ (pewna funkcja różniczkowalna) i $G_2(t) = X(t_0) + (t - t_0)\frac{dX}{dt}(t_0)$ prawa strona wzoru

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (F \circ G_1)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (F \circ G_2)(t).$$

jest równa

$$e^{X(t_0)} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_{X(t_0)}}}{\text{ad}_{X(t_0)}} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} X(t) \right) \right),$$

natomiast lewa strona jest równa $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} e^{X(t)}$. Tak więc

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} e^{X(t)} = e^{X(t_0)} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}_{X(t_0)}}}{\text{ad}_{X(t_0)}} \left(\left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=t_0} \right) \right).$$



- Rozważmy funkcję $g(z) = \frac{\log z}{1 - \frac{1}{z}}$, dla $|z - 1| < 1$.
- g jest funkcją holomorficzną i rozwija się w szereg potęgowy

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - 1)^m$$

o promieniu zbieżności 1.

- Dla dowolnego operatora T na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej mamy $g(T) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (T - \mathbb{1})^m$ pod warunkiem, że $\|T - \mathbb{1}\| < 1$.

TWIERDZENIE (WZÓR BAKERA-CAMPBELL-HAUSDORFFA)

Dla dowolnych macierzy $X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ o dostatecznie małej normie mamy

$$\log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})(Y) dt.$$