

# TEORIA GRUP II – WYKŁAD 9.

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

## FAKT

Niech  $t \mapsto X(t)$  będzie gładką funkcją o wartościach w  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ . Wówczas

$$\frac{d}{dt}e^{X(t)} = e^{X(t)} \left( \frac{1 - e^{-\text{ad}_{X(t)}}}{\text{ad}_{X(t)}} \left( \frac{dX}{dt} \right) \right).$$

- Rozważmy funkcję  $g(z) = \frac{\log z}{1 - \frac{1}{z}}$ , dla  $|z - 1| < 1$ .
- $g$  jest funkcją holomorficzną i rozwija się w szereg potęgowy

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (z - 1)^m$$

o promieniu zbieżności 1.

- Dla dowolnego operatora  $T$  na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej mamy  $g(T) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (T - \mathbb{1})^m$  pod warunkiem, że  $\|T - \mathbb{1}\| < 1$ .

### TWIERDZENIE (WZÓR BAKERA-CAMPBELL-HAUSDORFFA)

Dla dowolnych macierzy  $X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  o dostatecznie małej normie mamy

$$\log(e^X e^Y) = X + \int_0^1 g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})(Y) dt.$$

## Dowód

Dla  $t \in [0, 1]$  niech  $Z(t) = \log(e^X e^{tY})$ .

Pierwsze ograniczenie na  $\|X\|$  i  $\|Y\|$ :

- funkcja  $(X, \tilde{Y}) \mapsto e^X e^{\tilde{Y}}$  jest ciągła i przyjmuje wartość  $\mathbb{1}$  w punkcie  $(0, 0)$ ,
- stąd istnieje stała  $C_1 > 0$  taka, że dla  $\|X\|, \|\tilde{Y}\| < C_1$  mamy  $\|e^X e^{\tilde{Y}} - \mathbb{1}\| < 1$ ,
- oczywiście jeśli  $\|X\|, \|Y\| < C_1$ , to dla każdego  $t \in [0, 1]$  także  $\|X\|, \|tY\| < C_1$ .

Z jednej strony mamy  $e^{-Z(t)} \frac{d}{dt} e^{Z(t)} = e^{-Z(t)} \frac{d}{dt} (e^X e^{tY}) = e^{-tY} e^{-X} (e^X e^{tY} Y) = Y$ , a z drugiej, na mocy ostatniego wniosku

$$e^{-Z(t)} \frac{d}{dt} e^{Z(t)} = \frac{\mathbb{1} - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} \left( \frac{dZ}{dt} \right),$$

dzięki czemu otrzymujemy

$$\frac{\mathbb{1} - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} \left( \frac{dZ}{dt} \right) = Y.$$

## Dowód

Drugie ograniczenie na  $\|X\|$  i  $\|Y\|$ :

- funkcja  $(X, \tilde{Y}) \mapsto \text{ad}_{\log(e^X e^{\tilde{Y}})}$  jest ciągła i przyjmuje wartość 0 w punkcie  $(0, 0)$ ,
- stąd istnieje stała  $C_2 > 0$  taka, że  $C_2 \leq C_1$  i dla  $\|X\|, \|\tilde{Y}\| < C_2$  mamy  $\|\text{ad}_{\log(e^X e^{\tilde{Y}})}\| < \log 2$ ,
- oczywiście jeśli  $\|X\|, \|Y\| < C_2$ , to dla każdego  $t \in [0, 1]$  także  $\|X\|, \|tY\| < C_2$ .

Jeśli  $\|X\|, \|Y\| < C_2$ , to szereg

$$\frac{\mathbb{1} - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \text{ad}_{Z(t)}^m = \mathbb{1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \text{ad}_{Z(t)}^m$$

jest zbieżny i mamy

$$\left\| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \text{ad}_{Z(t)}^m \right\| < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\log 2)^m}{(m+1)!} < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\log 2)^m}{m!} = e^{\log 2} - 1 = 1.$$

W szczególności operator  $\frac{\mathbb{1} - \text{ad}_{Z(t)}}{\text{ad}_{Z(t)}}$  jest odwracalny.

## Dowód

Dla  $\|X\|, \|Y\| < C_3$  mamy więc

$$\frac{dZ}{dt} = \left( \frac{\mathbb{1} - e^{-\text{ad}_{Z(t)}}}{\text{ad}_{Z(t)}} \right)^{-1} (Y). \quad (\star)$$

Dalej, ponieważ  $\text{Ad}_{e^{Z(t)}} = \text{Ad}_{e^X e^{tY}} = \text{Ad}_{e^X} \text{Ad}_{e^{tY}}$ , otrzymujemy

$$e^{\text{ad}_{Z(t)}} = e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_{tY}} = e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y}.$$

Podstawiając ostatni wynik do wzoru  $(\star)$  otrzymujemy  $\frac{dZ}{dt} = \left( \frac{\mathbb{1} - (e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})^{-1}}{\log(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})} \right)^{-1} (Y)$  i po prawej stronie rozpoznajemy funkcję  $g$  od operatora  $e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y}$ :

$$\frac{dZ}{dt} = g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})(Y).$$

$$\text{Stąd } \log(e^X e^Y) = Z(1) = Z(0) + \int_0^1 \frac{dZ}{dt} dt = X + \int_0^1 g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})(Y) dt. \quad \square$$

- Funkcję  $g$  możemy rozwinąć w szereg potęgowy w kole o środku w  $z = 1$  i promieniu 1:

$$g(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m(m+1)} (z-1)^m.$$

- Z drugiej strony

$$\begin{aligned} (e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y} - \mathbb{1}) &= (\mathbb{1} + \text{ad}_X + \frac{1}{2} \text{ad}_X^2 + \cdots)(\mathbb{1} + t \text{ad}_Y + \frac{t^2}{2} \text{ad}_Y^2 + \cdots) - \mathbb{1} \\ &= \text{ad}_X + t \text{ad}_Y + t \text{ad}_X \text{ad}_Y + \frac{1}{2} \text{ad}_X^2 + \frac{t^2}{2} \text{ad}_Y^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Jest to szereg potęgowy względem  $\text{ad}_X$  i  $\text{ad}_Y$  bez wyrazu wolnego.

- W szczególności każde wyrażenie postaci  $(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y} - \mathbb{1})^m$  zawiera tylko wyrazy stopnia  $\geq m$  (względem  $\text{ad}_X$  i  $\text{ad}_Y$ ).

- Stąd

$$\begin{aligned}
 g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y}) &= \mathbb{1} + \frac{1}{2}(\text{ad}_X + t \text{ad}_Y + t \text{ad}_X \text{ad}_Y + \frac{1}{2} \text{ad}_X^2 + \frac{t^2}{2} \text{ad}_Y^2) \\
 &\quad - \frac{1}{6}(\text{ad}_X^2 + t^2 \text{ad}_Y^2 + t \text{ad}_X \text{ad}_Y + t \text{ad}_Y \text{ad}_X) \\
 &\quad + \text{wyrazy wyższego stopnia w } \text{ad}_X \text{ i } \text{ad}_Y.
 \end{aligned}$$

- Tak więc, pomijając wyrazy stopnia wyższego niż 2, mamy

$$g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y}) \approx \mathbb{1} + \frac{1}{2} \text{ad}_X + \frac{t}{2} \text{ad}_Y + \frac{t}{3} \text{ad}_X \text{ad}_Y - \frac{t}{6} \text{ad}_Y \text{ad}_X + \frac{1}{12} \text{ad}_X^2 + \frac{t^2}{12} \text{ad}_Y^2.$$

- Stosując ten operator do  $Y$  możemy dalej pominąć wszystkie wyrazy, w których po prawej stronie znajduje się  $\text{ad}_Y$ :

$$g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})(Y) \approx Y + \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{t}{6}[Y, [X, Y]] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]].$$

- Wreszcie podstawiając przybliżone wyrażenie na  $g(e^{\text{ad}_X} e^{t \text{ad}_Y})(Y)$  do wzoru BCH otrzymujemy

$$\begin{aligned}\log(e^X e^Y) &\approx X + \int_0^1 \left( Y + \frac{1}{2}[X, Y] - \frac{t}{6}[Y, [X, Y]] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] \right) dt \\ &= X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]].\end{aligned}$$

## DEFINICJA

Niech  $G$  i  $H$  będą macierzowymi grupami Liego. **Lokalnym homomorfizmem** z  $G$  do  $H$  nazywamy parę  $(\mathcal{U}, f)$ , gdzie  $\mathcal{U}$  jest łukowo spójnym otoczeniem  $\mathbb{1} \in G$ , a  $f: \mathcal{U} \rightarrow H$  jest odwzorowaniem ciągłym takim, że jeśli  $A, B \in \mathcal{U}$  spełniają  $AB \in \mathcal{U}$ , to  $f(AB) = f(A)f(B)$ .

## STWIERDZENIE

Niech  $G$  i  $H$  będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{h}$ . Dla  $\varepsilon > 0$  połóżmy

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \left\{ A \in G \mid \|A - \mathbb{1}\| < 1 \text{ i } \|\log A\| < \varepsilon \right\}.$$

Niech  $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  będzie homomorfizmem algebr Liego. Wtedy istnieje  $\varepsilon > 0$  taki, że odwzorowanie

$$f: \mathcal{U}_\varepsilon \ni A \mapsto e^{\phi(\log A)} \in H$$

jest lokalnym homomorfizmem.

## DOWÓD

Wybieramy  $\varepsilon > 0$  tak mały, że dla dowolnych  $A, B \in \mathcal{U}_\varepsilon$  wzór Bakera-Campbella-Hausdorffa możemy stosować zarówno  $X = \log A$  i  $Y = \log B$ , jak i  $\phi(X)$  i  $\phi(Y)$ .

Teraz ustalmy  $A, B \in \mathcal{U}_\varepsilon$  i przypuśćmy, że  $AB \in \mathcal{U}_\varepsilon$ . Wtedy, zgodnie z definicją  $f$ , mamy

$$f(AB) = f(e^X e^Y) = f(\exp(\log(e^X e^Y))) = e^{\phi(\log(e^X e^Y))}.$$

Następnie korzystamy dwukrotnie ze wzoru BCH i faktu, że  $\phi$  jest homomorfizmem algebr Liego:

$$\begin{aligned} \phi(\log(e^X e^Y)) &= \phi\left(X + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m(e^{\operatorname{ad}_X} e^{t \operatorname{ad}_Y} - \mathbb{1})^m(Y) dt\right) \\ &= \phi(X) + \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} a_m(e^{\operatorname{ad}_{\phi(X)}} e^{t \operatorname{ad}_{\phi(Y)}} - \mathbb{1})^m(\phi(Y)) dt = \log(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)}), \end{aligned}$$

co pokazuje, że  $f(AB) = e^{\phi(\log(e^X e^Y))} = e^{\log(e^{\phi(X)} e^{\phi(Y)})} = f(A)f(B)$ . □