

# TEORIA GRUP II – WYKŁAD 10.

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

## TWIERDZENIE

Niech  $G$  będzie jednospójną macierzową grupą Liego i niech  $(\mathcal{U}, f)$  będzie lokalnym homomorfizmem w macierzową grupę Liego  $H$ . Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup Liego  $\Phi: G \rightarrow H$  taki, że  $\Phi|_{\mathcal{U}} = f$ .

## DOWÓD

Krok 1: Definicja  $\Phi$  wzdłuż drogi.

Niech  $[0, 1] \ni t \mapsto A(t) \in G$  będzie drogą w  $G$  od  $A(0) = \mathbb{1}$  do  $A = A(1)$ . Podział  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  przedziału  $[0, 1]$  nazwiemy **dobrym**, jeśli dla każdego  $k \in \{0, \dots, m-1\}$  i dowolnych  $s, t \in [t_k, t_{k+1}]$  mamy  $A(t)A(s)^{-1} \in \mathcal{U}$ . Istnienie dobrych podziałów wynika z ciągłości odwzorowania  $t \mapsto A(t)$ .

Teraz ustalmy dobry podział  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  i zauważmy, że

$$A = (A(1)A(t_{m-1})^{-1})(A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}) \cdots (A(t_2)A(t_1)^{-1})A(t_1).$$

W świetle powyższego wzoru proponujemy następującą definicję  $\Phi(A)$ :

$$\Phi(A) = f(A(1)A(t_{m-1})^{-1})f(A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}) \cdots f(A(t_2)A(t_1)^{-1})f(A(t_1)).$$

(mamy  $A(t_1) = A(t_1)A(t_0)^{-1} \in \mathcal{U}$ ). Musimy teraz wykazać, że  $\Phi(A)$  nie zależy od wyboru dobrego podziału.

## Dowód

Zauważmy, że jeśli  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  jest dobrym podziałem  $[0, 1]$ , to dla każdego  $j$  i  $s \in ]t_j, t_{j+1}[$  podział  $t_0 < t_1 < \dots < t_j < s < t_{j+1} < \dots < t_m$  jest dobrym podziałem. Jeśli zamiast  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  użylibyśmy  $t_0 < t_1 < \dots < t_j < s < t_{j+1} < \dots < t_m$  do zdefiniowania  $\Phi(A)$  otrzymalibyśmy

$$\Phi(A) = f(A(1)A(t_{m-1})^{-1}) \cdots f(A(t_{j+1})A(s)^{-1})f(A(s)A(t_j)^{-1}) \cdots f(A(t_2)A(t_1)^{-1})A(t_1).$$

Ale  $(A(t_{j+1})A(s)^{-1})(A(s)A(t_j)^{-1}) = A(t_{j+1})A(t_j)^{-1} \in \mathcal{U}$ , więc

$$f(A(t_{j+1})A(t_j)^{-1}) = f\left((A(t_{j+1})A(s)^{-1})(A(s)A(t_j)^{-1})\right) = f(A(t_{j+1})A(s)^{-1})f(A(s)A(t_j)^{-1}),$$

co oznacza, że wartość  $\Phi(A)$  otrzymana z podziału zawierającego liczbę  $s$  jest taka sama jak otrzymana z wyjściowego podziału.

Tym samym wykazaliśmy, że dla dowolnego dobrego podziału, podział od niego drobniejszy jest dobry i nie zmienia definicji  $\Phi$  wzdłuż wybranej drogi.

## Dowód

Teraz dla dowolnych dwóch dobrych podziałów każdy podział wspólnie drobniejszy niż one da tę samą wartość  $\Phi(A)$ , która jest z jednej strony równa wartości wyznaczonej przez pierwszy podział, a z drugiej strony wartości wyznaczonej przez drugi podział. Oznacza to, że  $\Phi(A)$  nie zależy od wyboru dobrego podziału.

Krok 2: *Niezależność definicji  $\Phi$  od wyboru drogi.*

Ponieważ  $G$  jest jednospójna, jeśli  $A_0$  i  $A_1$  są dwoma drogami od  $1$  do  $A$ , to istnieje między nimi **homotopia**, tj. ciągłe odwzorowanie  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$  takie, że

- $\forall t \in [0, 1] \ H(0, t) = A_0(t),$
- $\forall t \in [0, 1] \ H(1, t) = A_1(t),$
- $\forall s \in [0, 1] \ H(s, 0) = 1,$
- $\forall s \in [0, 1] \ H(s, 1) = A.$

## Dowód

Zauważmy, że z racji tego, że  $[0, 1] \times [0, 1]$  jest zbiorem zwartym, istnieje  $N \in \mathbb{N}$  takie, że

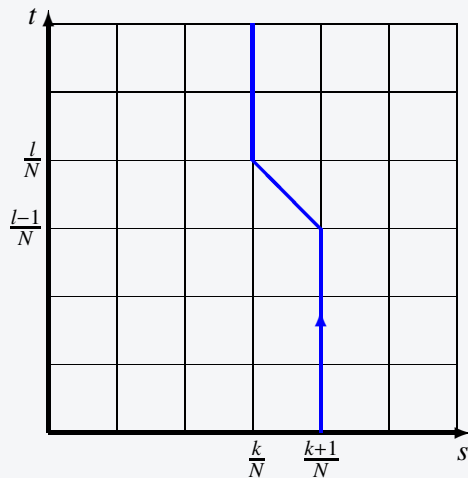
$$\left(\max\{|s - s'|, |t - t'|\} \leq \frac{2}{N}\right) \implies \left(H(s, t)H(s', t')^{-1} \in \mathcal{U}\right).$$

Teraz zdefiniujmy drogi  $\{B_{k,l} | k = 0, \dots, N-1, l = 0, \dots, N\}$  kładąc  $B_{k,l} = H \circ b_{k,l}$ , gdzie

$$b_{k,l}: [0, 1] \ni t \mapsto \begin{cases} \left(\frac{k+1}{N}, t\right) & t \in \left[0, \frac{l-1}{N}\right] \\ \left(\frac{k+1}{N} - \frac{t}{N}, t\right) & t \in \left]\frac{l-1}{N}, \frac{l}{N}\right[ \\ \left(\frac{k}{N}, t\right) & t \in \left[\frac{l}{N}, 1\right] \end{cases}$$

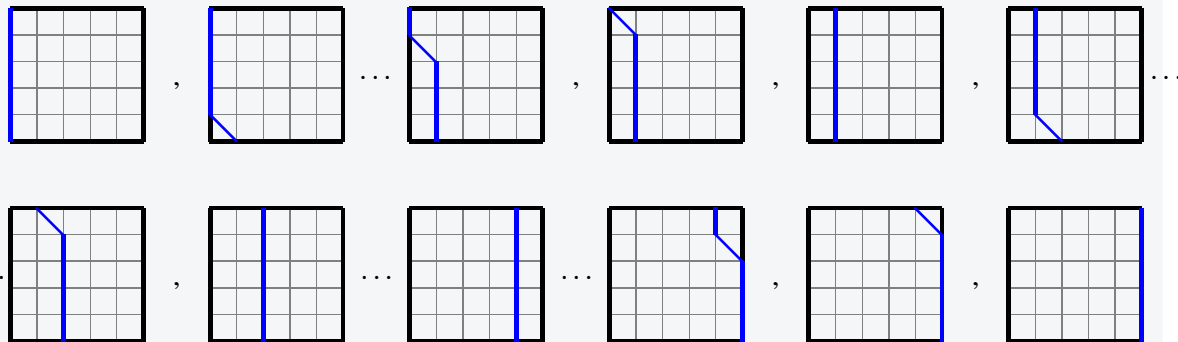
dla  $l > 0$  oraz  $B_{k,0}(t) = \left(\frac{k}{N}, t\right)$ . W szczególności  $B_{0,0} = A_0$ .

## Dowód



Ustawmy drogi ze zbioru  $\{B_{k,l}\} \cup \{A_1\}$  w następujący ciąg:

$$A_0 = B_{0,0}, B_{0,1}, \dots, B_{0,N-1}, B_{0,N}, B_{1,0}, B_{1,1}, \dots, B_{1,N}, B_{2,0}, \dots, B_{N-1,0}, \dots, B_{N-1,N-1}, B_{N-1,N}, A_1.$$



## Dowód

Wykażemy, że wartość  $\Phi(A)$  zdefiniowanego wzdłuż kolejnych dróg w opisanym ciągu jest taka sama, co oczywiście pokazuje, że wartość  $\Phi(A)$  wyznaczona przez drogę  $A_0$  jest taka sama, co wyznaczona przez drogę  $A_1$ .

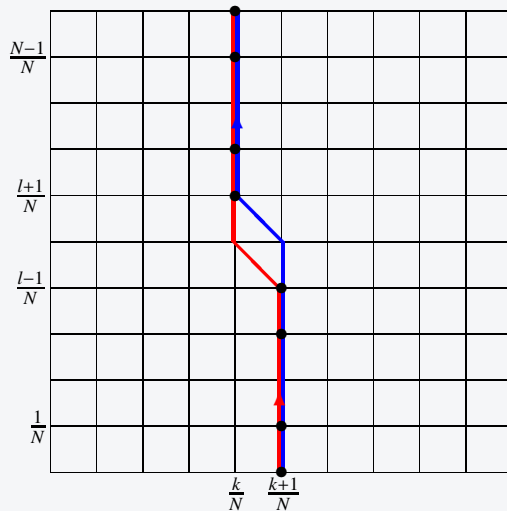
Wartość  $\Phi(A)$  wzdłuż danej drogi jest zdeterminowana przez wybór dobrego podziału  $t_0 < \dots < t_m$  przedziału  $[0, 1]$  wzorem

$$\Phi(A) = f(A(1)A(t_{m-1})^{-1})f(A(t_{m-1})A(t_{m-2})^{-1}) \cdots f(A(t_2)A(t_1)^{-1})A(t_1)$$

(choć wiemy już, że  $\Phi(A)$  tak na prawdę nie zależy od podziału). Weźmy dwie drogi  $B_{k,l}$  i  $B_{k,l+1}$  ( $0 < l < N - 1$ ) i wybierzmy punkty podziału w następujący sposób:

$$0 < \frac{1}{N} < \dots < \frac{l-1}{N} < \frac{l+1}{N} < \frac{l+2}{N} < \dots < \frac{N-1}{N} < 1.$$

## Dowód



## DOWÓD

Zaznaczone punkty są obrazami przy odwzorowaniu  $b_{k,l}$  punktów dobrego podziału  $[0, 1]$  na mocy wyboru liczby  $N$ . Ale to oznacza, że opisany wyżej podział daje dokładnie takie same wyniki dla krzywej  $B_{k,l}$  i dla krzywej  $B_{k,l+1}$ . Ponieważ wartości  $H(s, 0)$  i  $H(s, 1)$  nie zależą od  $s$ , podobny argument pokazuje, że wartość  $\Phi(A)$  nie zmienia się przy przejściu od  $B_{k,0}$  do  $B_{k,1}$  i od  $B_{k,N}$  do  $B_{k+1,0}$ .

Krok 3:  $\Phi$  jest homomorfizmem.

Rozważmy dwie drogi  $t \mapsto A(t)$  i  $s \mapsto B(s)$  w  $G$  – pierwsza od  $\mathbb{1}$  do  $A = A(1)$  i druga od  $\mathbb{1}$  do  $B = B(1)$  – i niech  $t_0 < \dots < t_m$  będzie dobrym podziałem dla  $t \mapsto A(t)$ , a  $s_0 < \dots < s_k$  będzie dobrym podziałem dla  $s \mapsto B(s)$ . Dalej zdefiniujemy  $C: [0, 1] \rightarrow G$  kładąc

$$C(t) = \begin{cases} B(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ A(2t - 1)B & t \in ]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

## Dowód

Nietrudno się przekonać, że  $C$  jest drogą od  $1$  do  $AB$  oraz że

$$\frac{s_0}{2} < \frac{s_1}{2} < \dots < \frac{s_{k-1}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{t_1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{t_2}{2} < \dots < \frac{1}{2} + \frac{t_m}{2} \quad (\P)$$

jest dobrym podziałem dla  $C$ .

Obliczając  $\Phi(A)$  i  $\Phi(B)$  w oparciu o podziały  $t_0 < \dots < t_m$  i  $s_0 < \dots < s_k$  otrzymujemy odpowiednio

$$\Phi(A) = f(A A(t_{m-1})^{-1}) f(A(t_{m-1}) A(t_{m-2})^{-1}) \dots f(A(t_2) A(t_1)^{-1}) f(A(t_1))$$

oraz

$$\Phi(B) = f(B B(s_{k-1})^{-1}) f(B(s_{k-1}) B(s_{k-2})^{-1}) \dots f(B(s_2) B(s_1)^{-1}) f(B(s_1)).$$

## Dowód

Natomiast obliczając  $\Phi(AB)$  w oparciu o podział  $(\mathfrak{P})$  dla drogi  $t \mapsto C(t)$  dostajemy

$$\begin{aligned}
 \Phi(AB) &= f\left(AB C\left(\frac{1}{2} + \frac{t_{m-1}}{2}\right)^{-1}\right) f\left(C\left(\frac{1}{2} + \frac{t_{m-1}}{2}\right) C\left(\frac{1}{2} + \frac{t_{m-2}}{2}\right)^{-1}\right) \cdots f\left(C\left(\frac{1}{2} + \frac{t_1}{2}\right) C\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) \\
 &\quad \times f\left(C\left(\frac{1}{2}\right) C\left(\frac{s_{k-1}}{2}\right)^{-1}\right) f\left(C\left(\frac{s_{k-1}}{2}\right) C\left(\frac{s_{k-2}}{2}\right)^{-1}\right) \cdots f\left(C\left(\frac{s_2}{2}\right) C\left(\frac{s_1}{2}\right)^{-1}\right) f\left(C\left(\frac{s_1}{2}\right)\right) \\
 &= f(AB B^{-1} A(t_{m-1})^{-1}) f(A(t_{m-1}) B B^{-1} A(t_{m-2})^{-1}) \cdots f(A(t_1) B B^{-1}) \\
 &\quad \times f(B B(s_{k-1})^{-1}) f(B(s_{k-1}) B(s_{k-2})^{-1}) \cdots f(B(s_2) B(s_1)^{-1}) f(B(s_1)) \\
 &= \Phi(A) \Phi(B).
 \end{aligned}$$

Krok 4:  $\Phi|_{\mathcal{U}} = f$ .

Weźmy  $A \in \mathcal{U}$  oraz drogę  $[0, 1] \ni t \mapsto A(t) \in \mathcal{U}$  (zbiór  $\mathcal{U}$  jest łukowo spójny) od  $\mathbb{1}$  do  $A$ . Dalej niech  $t_0 < \cdots < t_m$  będzie dobrym podziałem dla tej drogi. Indukcyjnie pokażemy, że  $\Phi(A(t_j)) = f(A(t_j))$  dla wszystkich  $j$ .

## Dowód

Ustalmy  $j$ . Wtedy odwzorowanie  $[0, 1] \ni s \mapsto A(t_j s)$  jest drogą od  $\mathbb{1}$  do  $A(t_j)$  i  $\frac{t_0}{t_j} < \dots < \frac{t_j}{t_j}$  jest dobrym podziałem dla tej drogi. Stąd podstawiając odpowiednie punkty podziału dostajemy

$$\Phi(A(t_j)) = f(A(t_j)A(t_{j-1})^{-1}) \cdots f(A(t_2)A(t_1)^{-1})f(A(t_1)).$$

Dla  $j = 1$  oznacza to  $\Phi(A(t_1)) = f(A(t_1))$ .

Teraz przypuśćmy, że dla pewnego  $j \geq 1$  mamy  $\Phi(A(t_j)) = f(A(t_j))$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \Phi(A(t_{j+1})) &= f(A(t_{j+1})A(t_j)^{-1})f(A(t_j)A(t_{j-1})^{-1}) \cdots f(A(t_2)A(t_1)^{-1})f(A(t_1)) \\ &= f(A(t_{j+1})A(t_j)^{-1})\Phi(A(t_j)) \\ &= f(A(t_{j+1})A(t_j)^{-1})f(A(t_j)). \end{aligned}$$

Wreszcie, skoro  $A(t_{j+1})A(t_j)^{-1}$ ,  $A(t_j)$  oraz iloczyn  $A(t_{j+1})A(t_j)^{-1} \cdot A(t_j) = A(t_{j+1})$  należą do  $\mathcal{U}$ , a  $f$  jest lokalnym homomorfizmem

$$\Phi(A(t_{j+1})) = f(A(t_{j+1})).$$

Dla  $j = m$  otrzymujemy  $\Phi(A) = f(A)$ .

## DOWÓD

Krok 5: Jedyność homomorfizmu  $\Phi$ .

$\mathcal{U}$  jest otoczeniem  $1 \in G$ , a  $G$  jest spójna, więc  $G$  jest algebraicznie generowana przez  $\mathcal{U}$ . Innymi słowy każdy element  $A \in G$  jest postaci  $A = A_1 \cdots A_N$ , dla pewnych  $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{U}$ . Zatem

$$\Phi(A) = \Phi(A_1) \cdots \Phi(A_N) = f(A_1) \cdots f(A_N).$$

Wzór ten wyznacza  $\Phi(A)$  w oparciu o wartości  $f$  na elementach  $\mathcal{U}$ , co implikuje jedyność homomorfizmu  $\Phi$ .

Krok 6: Ciągłość homomorfizmu  $\Phi$ .

Skoro  $\Phi|_{\mathcal{U}} = f$ , a  $f$  jest z założenia odwzorowaniem ciągłym, homomorfizm  $\Phi$  jest ciągły na otoczeniu jedynek. Dla  $A \in G$  i  $A_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A$  mamy

$$\Phi(A_m) = \Phi(A_m A^{-1}) \Phi(A) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \Phi(1) \Phi(A) = \Phi(A),$$

bo  $A_m A^{-1}$  należy do  $\mathcal{U}$  dla dostatecznie dużych  $m$ . □