

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 11.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE

Niech G i H będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ i załóżmy, że G jest jednoznaczna. Wówczas jeśli $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ jest homomorfizmem algebr Liego, to istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\Phi: G \rightarrow H$ taki, że dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ mamy $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$.

Dowód

Niech $(\mathcal{U}, f)$ będzie lokalnym homomorfizmem wyznaczonym przez ϕ i niech Φ będzie jego jedynym rozszerzeniem do homomorfizmu $G \rightarrow H$. Dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ element $e^{\frac{X}{m}}$ należy do $\mathcal{U}$ dla dostatecznie dużych m , a więc $\Phi(e^{\frac{X}{m}}) = f(e^{\frac{X}{m}}) = e^{\frac{\phi(X)}{m}}$.

Jako że Φ jest homomorfizmem mamy oczywiście

$$\Phi(e^X) = \Phi(e^{\frac{X}{m}})^m = e^{\phi(X)}.$$

Jedyność Φ wynika z tego, że każdy element $A \in G$ jest postaci $A = e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ dla pewnych $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{g}$, a więc wartości homomorfizmu Φ są jednoznacznie zdeterminowane przez jego wartości na obrazie odwzorowania wykładniczego. □

WNIOSEK

Niech G i H będą jednospójnymi macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Wówczas jeśli algebry $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ są izomorficzne, to grupy G i H są izomorficzne.

DOWÓD

Niech $\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ i $\psi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ będą wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami algebr Liego i niech Φ i Ψ będą odpowiadającymi im homomorfizmami grup. Wtedy dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$

$$\Psi(\Phi(e^X)) = \Psi(e^{\phi(X)}) = e^{\psi(\phi(X))} = e^X.$$

Ponieważ G jest spójna, każdy element $A \in G$ jest iloczynem $e^{X_1} \cdots e^{X_m}$, a więc $\Psi(\Phi(A)) = A$ dla wszystkich A . Analogicznie $\Phi(\Psi(B)) = B$ dla wszystkich $B \in H$. □

PRZYKŁAD

Rozważmy algebrę Liego $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ oraz jej podzbiór

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} it & 0 \\ 0 & i\theta t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

gdzie θ jest liczbą niewymierną. Nietrudno się przekonać, że $\mathfrak{h}$ jest (przemienną) algebrą Liego.

Przypuśćmy, że istnieje podgrupa Liego $H \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, której algebrą Liego jest $\mathfrak{h}$. Grupa ta musiałaby zawierać zbiór

$$H_0 = \left\{ \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\theta t} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

a skoro podgrupa Liego jest domknięta, także jego domknięcie:

$$\overline{H_0} = \left\{ \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ale $\overline{H_0}$ jest dwuwymiarową podgrupą w $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, a więc algebra Liego H musiałaby być co najmniej dwuwymiarowa. Oznacza to, że $\mathfrak{h}$ nie może być algebrą Liego żadnej podgrupy Liego $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

DEFINICJA

Dla dowolnej podgrupy $H \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ definiujemy **algebrę Liego grupy H** jako

$$\{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \ e^{tX} \in H\}.$$

DEFINICJA

Niech G będzie macierzową grupą Liego. Podgrupę $H \leq G$ nazywamy **analityczną podgrupą G** , jeśli

- ❶ H jest spójna
 - ❷ algebra Liego $\mathfrak{h}$ podgrupy H jest podprzestrzenią wektorową algebry Liego $\mathfrak{g}$,
 - ❸ każdy element grupy H może zostać zapisany w postaci $e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ dla pewnych $X_1, \dots, X_m \in \mathfrak{h}$.
- Można udowodnić, że algebra Liego dowolnej podgrupy $H \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ jest faktycznie algebrą Liego. Nie będziemy potrzebowali tego wyniku.

STWIERDZENIE

Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i niech H będzie analityczną podgrupą G . Wtedy algebra Liego $\mathfrak{h}$ grupy H jest podalgebrą algebry $\mathfrak{g}$.

DOWÓD

Z założenia $\mathfrak{h}$ jest podprzestrzenią w $\mathfrak{g}$, więc musimy tylko wykazać, że $\mathfrak{h}$ jest zamknięta ze względu na $[\cdot, \cdot]$.

Niech $X, Y \in \mathfrak{h}$. Ponieważ dla wszystkich s, t mamy $e^{tX}, e^{sY} \in H$ również

$$e^{se^{tX}Ye^{-tX}} = e^{tX}e^{sY}e^{-tX} \in H, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

co oznacza, że dla każdego t element $e^{tX}Ye^{-tX}$ należy do $\mathfrak{h}$. Wreszcie $\mathfrak{h}$ jest domkniętą podprzestrzenią, więc

$$[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tX}Ye^{-tX} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(e^{hX}Ye^{-hX} - Y)$$

należy do $\mathfrak{h}$.

□

- Bez dowodu podamy kolejne bardzo ważne zastosowanie formuły Bakera-Campbella-Hausdorffa.

TWIERDZENIE

Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i niech $\mathfrak{h}$ będzie podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$. Wówczas istnieje dokładnie jedna analityczna podgrupa $H \leq G$, której algebrą Liego jest $\mathfrak{h}$.

- Oczywiście nie ma gwarancji, że H w powyższym twierdzeniu jest macierzową grupą Liego (jest nią iff jest domknięta).

- Niech G będzie macierzową grupą Liego.
- Będziemy rozważać wyłącznie skończenie wymiarowe reprezentacje $\Pi: G \rightarrow \text{GL}(V)$, gdzie V jest przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$, które są ciągłe, tj. dla dowolnego $v \in V$ funkcja $G \ni A \mapsto \Pi(A)v \in V$ jest ciągła.
- W zależności od tego czy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ czy $\mathbb{C}$ mówimy o **rzeczywistych i zespolonych** reprezentacjach G .
- Łatwo się przekonać, że dzięki skończonemu wymiarowi V warunek ciągłości jest równoważny temu, że odwzorowanie $G \ni A \mapsto \Pi(A) \in \text{End}(V)$ jest ciągłe dla dowolnej normy na $\text{End}(V)$ (zawsze preferujemy normę operatorową wyznaczoną przez jakąś normę na V).
- Innymi słowy Π jest reprezentacją G na V iff Π jest homomorfizmem grup Liego $G \rightarrow \text{GL}(V)$, gdzie $\text{GL}(V)$ oznacza grupę wszystkich odwracalnych $\mathbb{K}$ -liniowych operatorów na V .
- Czasami zamiast nazywać Π reprezentacją będziemy mówić, że V jest reprezentacją G . Innymi słowy reprezentacją będziemy czasem nazywać przestrzeń wektorową z ciągłym działaniem G przez operatory liniowe.

- Oprócz reprezentacji grup będziemy też rozważać reprezentacje algebr Liego.

DEFINICJA

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego i niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{K}$.

Reprezentacją $\mathfrak{g}$ **na** V nazywamy odwzorowanie liniowe $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ takie, że dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ mamy $\pi([X, Y]) = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$.

- Innymi słowy reprezentacja $\mathfrak{g}$ jest to homomorfizm algebr Liego $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, gdzie $\mathfrak{gl}(V)$ oznacza algebrę Liego wszystkich odwzorowań liniowych $V \rightarrow V$ z komutatorem.
- Podobnie jak w przypadku grup, będziemy czasem mówić, że V jest reprezentacją $\mathfrak{g}$.
- W zależności od tego czy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ czy $\mathbb{C}$ mówimy o **rzeczywistych** i **zespółonych** reprezentacjach $\mathfrak{g}$.

- Podstawowym przykładem reprezentacji algebry Liego jest reprezentacja stowarzyszona z reprezentacją grupy Liego.
- Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i niech $\Pi: G \rightarrow \mathrm{gl}(V)$ będzie reprezentacją (rzeczywistą lub zespoloną).
- Wtedy istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{gl}(V)$ taka, że dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ mamy

$$\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}.$$

- Jak wiemy reprezentacja π jest „pochodną” reprezentacji Π np. w tym sensie, że dla dowolnego $v \in V$ mamy

$$\pi(X)v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi(e^{tX})v, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

- Każda macierzowa grupa Liego G ma **reprezentację fundamentalną** (lub **standardową** albo **definiującą**), tj. włożenie $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$. Stowarzyszona z nią reprezentacja $\mathfrak{g}$ jest oczywiście włożeniem $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{gl}(\mathbb{C}^n)$.
- Szczególnym przykładem pary (Π, π) – jak wyżej – jest $\Pi = \mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, $\pi = \mathrm{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{gl}(\mathfrak{g})$.