

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 12.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

DEFINICJA

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego i niech π_1 i π_2 będą reprezentacjami $\mathfrak{g}$ na przestrzeniach V_1 i V_2 nad tym samym ciałem. Powiemy, że operator liniowy T **splata** reprezentacje π_1 i π_2 , jeśli $T: V_1 \rightarrow V_2$ taki, że dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ mamy $T\pi_1(X) = \pi_2(X)T$. Reprezentacja π_1 jest **równoważna** π_2 (co zapisujemy $\pi_1 \approx \pi_2$), jeśli istnieje odwracalny operator liniowy splatający π_1 i π_2 . Zbiór operatorów splatających π_1 i π_2 oznaczamy symbolem $\text{Mor}(\pi_1, \pi_2)$.

- Jest jasne, że $\text{Mor}(\pi_1, \pi_2)$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni wszystkich odwzorowań liniowych $V_1 \rightarrow V_2$, a dla reprezentacji $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$ zbiór $\text{Mor}(\pi, \pi)$ (oznaczany $\text{End}(\pi)$) jest podalgebrą z jedynką w $\text{End}(V)$.

DEFINICJA

Niech $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(V)$ będzie reprezentacją. Powiemy, że podprzestrzeń $W \subset V$ jest **niezmiennicza** dla π , jeśli dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ operator $\pi(X)$ zachowuje W . Reprezentacja π jest **nieprzywiedlna**, jeśli jedynymi podprzestrzeniami niezmienniczymi dla π są $\{0\}$ i V .

TWIERDZENIE

- ❶ Niech G będzie spójną macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i niech Π będzie reprezentacją G , a π stowarzyszoną z nią reprezentacją $\mathfrak{g}$. Wówczas Π jest nieprzywiedlna iff π jest nieprzywiedlna.
- ❷ Niech G będzie spójną macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i niech Π_1 i Π_2 będą reprezentacjami G , a π_1 i π_2 stowarzyszonymi z nimi reprezentacjami $\mathfrak{g}$. Wówczas $\Pi_1 \approx \Pi_2$ iff $\pi_1 \approx \pi_2$.

Dowód

Ad ❶. Przypuśćmy, że W jest właściwą podprzestrzenią niezmienniczą dla π . Oznacza to, że dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ i $w \in W$ mamy $\pi(X)w \in W$. Skoro $\Pi(e^X)w = e^{\pi(X)}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \pi(X)^n w$, mamy też $\Pi(e^X)w \in W$. Wreszcie, ponieważ G jest spójna, każdy element $A \in G$ jest postaci $e^{X_1} \cdots e^{X_m}$ dla pewnych $X_1, \dots, X_m$, a stąd $Aw \in W$. Innymi słowy, jeśli π nie jest nieprzywiedlna, to Π także nie jest nieprzywiedlna. Analogicznie, jeśli W jest właściwą podprzestrzenią W niezmienniczą dla Π , to dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ i $w \in W$ mamy

$$\pi(X)w = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Pi(e^{tX})w \in W,$$

czyli jeśli Π nie jest nieprzywiedlna, to π też nie jest nieprzywiedlna.

Ad ❷. Jeśli $T\pi_1(X)T^{-1} = \pi_2(X)$ dla wszystkich X , to $e^{\pi_1(X)}T^{-1} = e^{\pi_2(X)}$, czyli $T\Pi_1(e^X)T^{-1} = \Pi_2(e^X)$ dla wszystkich X . W świetle spójności G oznacza to, że $T\Pi_1(A)T^{-1} = \Pi_2(A)$ dla wszystkich $A \in G$.

Odwrotnie, jeśli $T\Pi_1(A)T^{-1} = \Pi_2(A)$ dla wszystkich A , to podstawiając $A = e^{tX}$ i różniczkując w $t = 0$ otrzymujemy $T\pi_1(X)T^{-1} = \pi_2(X)$ dla każdego $X \in \mathfrak{g}$. □

UWAGA

Niech G będzie spójną macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i niech Π_1 i Π_2 będą reprezentacjami G na przestrzeniach V_1 i V_2 . Dalej niech π_1 i π_2 będą stowarzyszonymi reprezentacjami $\mathfrak{g}$. Wówczas dla dowolnego operatora $T: V_1 \rightarrow V_2$ mamy

$$(T \in \text{Mor}(\pi_1, \pi_2)) \iff (T \in \text{Mor}(\Pi_1, \Pi_2)).$$

Istotnie, jeśli $T\pi_1(X) = \pi_2(X)T$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$, to również

$$T\pi_1(X)^m = \pi_2(X)T\pi_1(X)^{m-1} = \dots = \pi_2(X)^m T,$$

a więc

$$Te^{\pi_1(X)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} T\pi_1(X)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \pi_2(X)^m T = e^{\pi_2(X)} T,$$

co pokazuje, że $T\Pi_1(A) = \Pi_2(A)T$ dla wszystkich $A \in G$, bo G jest spójna.

UWAGA

Z drugiej strony, tak jak w dowodzie ostatniego twierdzenia, jeśli $T \in \text{Mor}(\Pi_1, \Pi_2)$, to dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ mamy

$$Te^{t\pi_1(X)} = T\Pi_1(e^{tX}) = \Pi_2(e^{tX})T = e^{t\pi_2(X)}T$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ i różniczkując tę równość w $t = 0$ otrzymujemy

$$T\pi_1(X) = \pi_2(X)T$$

dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$.

Jeśli G nie jest spójna, sytuacja może wyglądać inaczej. Przykładowo rozważmy grupę $O(2)$ i dwie jej jednowymiarowe reprezentacje: niech Π_1 będzie trywialna, a $\Pi_2(A) = \det A$ ($A \in O(2)$). Wówczas $\pi_1 = \pi_2 = 0$, a więc $\text{Mor}(\pi_1, \pi_2) = \mathbb{C}$ (każdy operator $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest splataczem). Z drugiej strony $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ splata Π_1 z Π_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $T \det A = T$ dla wszystkich $A \in O(2)$. Biorąc A o wyznaczniku -1 otrzymujemy $T = -T$, czyli $T = 0$. Innymi słowy $\text{Mor}(\Pi_1, \Pi_2) = \{0\}$.

- Następujące stwierdzenie jest natychmiastową konsekwencją własności uniwersalnej kompleksyfikacji:

STWIERDZENIE

Niech $\mathfrak{g}$ będzie rzeczywistą algebrą Liego i niech $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ będzie zespoloną reprezentacją $\mathfrak{g}$. Wówczas π rozszerza się jednoznacznie do $\mathbb{C}$ -liniowej reprezentacji $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ na V .

PRZYKŁAD: PEWNE REPREZENTACJE $\mathfrak{su}(2)$ I $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Dla $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ zdefiniujemy reprezentację Π^s grupy $SU(2)$ na przestrzeni V_s jednorodnych wielomianów dwóch zmiennych z_1 i z_2 stopnia s :

$$V_s = \text{span}\{z_1^{2s}, z_1^{2s-1}z_2, \dots, z_1z_2^{2s-1}, z_2^{2s}\}$$

wzorem

$$(\Pi^s(A)f)\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(A^{-1}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right), \quad f \in V_s, A \in SU(2).$$

Obliczmy stowarzyszoną z Π^s reprezentację algebry Liego $\mathfrak{su}(2)$. Dla $X \in \mathfrak{su}(2)$ mamy

$$\pi^s(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Pi^s(e^{tX}),$$

a więc dla $f \in V_s$

$$\pi^s(X)f\left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f\left(e^{-tX}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\right).$$

PRZYKŁAD: PEWNE REPREZENTACJE $\mathfrak{su}(2)$ I $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Niech $z(t) = e^{-tX} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$. Wtedy $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(z(t)) = \frac{\partial f}{\partial z_1} \left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) \frac{dz_1}{dt}(0) + \frac{\partial f}{\partial z_2} \left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) \frac{dz_2}{dt}(0)$, a skoro

$$\frac{dz}{dt} \Big|_{t=0} = -X \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} X_{11}z_1 + X_{12}z_2 \\ X_{21}z_1 + X_{22}z_2 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy

$$(\pi^s(X)f) \left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = -(X_{11}z_1 + X_{12}z_2) \frac{\partial f}{\partial z_1} - (X_{21}z_1 + X_{22}z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2}.$$

Teraz rozszerzamy reprezentację π^s do reprezentacji kompleksyfikacji algebry $\mathfrak{su}(2)$, tj. na całą algebrę $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Jest ona dana dokładnie tym samym wzorem, tyle że $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. W szczególności stosując π^s do elementów

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dostajemy

$$\pi^s(H) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \pi^s(X) = -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \pi^s(Y) = -z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

PRZYKŁAD: PEWNE REPREZENTACJE $\mathfrak{su}(2)$ I $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Zdefiniujmy

$$\xi_j^s \left(\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right) = \frac{z_1^{s+j} z_2^{s-j}}{\sqrt{(s+j)!(s-j)!}}, \quad j = -s, -s+1, \dots, s-1, s.$$

Wtedy $\{\xi_{-s}^s, \dots, \xi_s^s\}$ jest bazą V_s i na tej bazie operatory $\pi^s(H)$, $\pi^s(X)$ i $\pi^s(Y)$ działają tak:

$$\pi^s(X)\xi_j^s = -\sqrt{(s+j)(s-j+1)}\xi_{j-1}^s,$$

$$\pi^s(Y)\xi_j^s = -\sqrt{(s+j-1)(s-j)}\xi_{j+1}^s,$$

$$\pi^s(H)\xi_j^s = -2j\xi_j^s.$$

(przy czym $\pi^s(X)\xi_{-s}^s = \pi^s(Y)\xi_s^s = 0$). W szczególności wartości własne operatora $\pi^s(H)$ są zawsze liczbami całkowitymi. Ponadto jeśli $\pi^s(E)f = 0$, to f jest wektorem własnym $\pi^s(H)$ z nieujemną wartością własną.

PRZYKŁAD: PEWNE REPREZENTACJE $\mathfrak{su}(2)$ I $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Wykażemy teraz, że reprezentacja π^s jest nieprzywiedlna. Niech W będzie niezerową podprzestrzenią niezmienniczą dla π^s i niech $w \in W \setminus \{0\}$. Możemy zapisać w w bazie

$$w = \sum_{j=-s}^s \alpha^j \xi_j^s$$

i przynajmniej jeden współczynnik α^j jest różny od zera. Dalej niech $k_0 = s + \max\{j \mid \alpha^j \neq 0\}$. Wtedy $\pi^s(X)^{k_0} w$ ma niezerowy współczynnik przy wektorze bazowym ξ_{-s}^s i przy żadnym innym. W takim razie W zawiera wektor ξ_{-s}^s , a więc z niezmienniczości wynika, że zawiera też $\pi^s(Y)^k \xi_{-s}^s$ dla dowolnego k , tj. całą bazę przestrzeni V_s .

Można także wykazać, że każda nieprzywiedlna reprezentacja $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ jest równoważna którejś reprezentacji π^s .