

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 13.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Podobnie jak to jest w przypadku reprezentacji grup, możemy tworzyć sumy proste reprezentacji algebr Liego.
- Niech π_1 i π_2 będą reprezentacjami algebry Liego $\mathfrak{g}$ na przestrzeniach V_1 i V_2 . Wtedy

$$(\pi_1 \oplus \pi_2): \mathfrak{g} \ni X \mapsto \begin{bmatrix} \pi_1(X) & \\ & \pi_2(X) \end{bmatrix} \in \text{End}(V_1 \oplus V_2)$$

jest reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{g}$.

- Nietrudno się przekonać, że jeśli Π_1 i Π_2 są reprezentacjami macierzowej grupy Liego G ze stowarzyszonymi reprezentacjami jej algebry Liego π_1 i π_2 , to reprezentacją stowarzyszoną z $\Pi_1 \oplus \Pi_2$ jest $\pi_1 \oplus \pi_2$.

DEFINICJA

Powiemy, że reprezentacja algebry lub macierzowej grupy Liego na przestrzeni V jest **w pełni redukowalna**, jeśli dla dowolnych podprzestrzeni niezmienniczych U i W takich, że $U \subset W$ istnieje podprzestrzeń niezmiennicza $\tilde{U}$ taka, że $\tilde{U} \subset W$, $U \cap \tilde{U} = \{0\}$ i $W = U + \tilde{U}$.

- Nietrudno dowieść następującego stwierdzenia:

STWIERDZENIE

Skończenie wymiarowa w pełni redukowalna reprezentacja algebry lub macierzowej grupy Liego jest równoważna sumie prostej reprezentacji nieprzywiedlnych.

- Przypomnijmy też pewne fakty z poprzedniego semestru:

FAKTY

- ❶ Niech Π będzie unitarną reprezentacją macierzowej grupy Liego na skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta. Wówczas Π jest w pełni redukowalna.
- ❷ Niech Π będzie reprezentacją zwartej macierzowej grupy Liego na skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V . Wówczas istnieje iloczyn skalarny na V , względem którego Π jest unitarna. W szczególności Π jest w pełni redukowalna.

- Niech G i H będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$.
- Jest jasne, że $G \times H$ jest macierzową grupą Liego i nietrudno się przekonać, że algebrą Liego $G \times H$ jest $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.

STWIERDZENIE

Niech G i H będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ i niech Π_1 i Π_2 będą skończone wymiarowymi reprezentacjami G i H odpowiednio na V_1 i V_2 . Wówczas

- 1 odwzorowanie $\Pi_1 \otimes \Pi_2: G \times H \ni (A, B) \mapsto \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(B) \in \text{End}(V_1 \otimes V_2)$ jest reprezentacją,
- 2 oznaczając przez π_1 i π_2 reprezentacje $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ stowarzyszone z Π_1 i Π_2 oraz przez $\pi_1 \otimes \pi_2$ reprezentację $G \times H$ stowarzyszoną z $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ mamy

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(X, Y) = \pi_1(X) \otimes \mathbb{1}_{V_2} + \mathbb{1}_{V_1} \otimes \pi_2(Y)$$

dla wszystkich $(X, Y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$.

Dowód

Punkt ❶ jest jasny.

Ad ❷. Po pierwsze dla $(X, Y) \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ mamy

$$e^{t(X,Y)} = (e^{tX}, e^{tY}) \in G \times H.$$

Dalej, ponieważ odwzorowanie $V_1 \times V_2 \ni (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$ jest dwuliniowe, korzystając z reguły Leibniza mamy

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Pi_1(e^{tX}) \otimes \Pi_2(e^{tY})) = \Pi(e^{0 \cdot X}) \otimes \pi_2(Y) + \pi_1(X) \otimes \Pi_2(e^{0 \cdot Y}) = \mathbb{1} \otimes \pi_2(Y) + \pi_1(X) \otimes \mathbb{1}.$$



DEFINICJA

Niech $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ będą algebrami Liego i niech π_1 i π_2 będą reprezentacjami $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ odpowiednio na V_1 i V_2 . Odwzorowanie

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \ni (X, Y) \mapsto \pi_1(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_2(Y) \in \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$$

nazywamy **zewnętrznym iloczynem tensorowym** reprezentacji π_1 i π_2 .

Jeśli $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, to złożenie

$$\mathfrak{g} \ni X \mapsto (X, X) \mapsto \pi_1(X) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \pi_2(Y) \in \mathfrak{gl}(V_1 \otimes V_2)$$

nazywamy **iloczynem tensorowym** π_1 i π_2 . W obu przypadkach otrzymaną reprezentację oznaczamy symbolem $\pi_1 \otimes \pi_2$.

LEMAT SCHURA

- ❶ Niech V i W będą nieprzywiedlnymi rzeczywistymi lub zespolonymi reprezentacjami algebry lub macierzowej grupy Liego i niech $T: V \rightarrow W$ będzie operatorem splatającym. Wówczas $T = 0$ lub T jest izomorfizmem.
- ❷ Niech V i W będą nieprzywiedlnymi zespolonymi reprezentacjami algebry lub macierzowej grupy Liego. Wówczas przestrzeń operatorów splatającym te reprezentacje jest
 - zerowa, jeśli V i W są nierównoważne,
 - jednowymiarowa, jeśli V i W są równoważne.
- ❸ Niech V będzie nieprzywiedlną zespoloną reprezentacją algebry lub macierzowej grupy Liego. Wtedy $\text{End}(V) = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

WNIOSEK

- ❶ Niech Π będzie nieprzywiedlną zespoloną reprezentacją macierzowej grupy Liego G . Wówczas istnieje homomorfizm $\Lambda: \mathcal{Z}(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ taki, że dla każdego $A \in \mathcal{Z}(G)$ mamy

$$\Pi(A) = \Lambda(A)\mathbb{1}.$$

- ❷ Niech π będzie nieprzywiedlną zespoloną reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{g}$. Wówczas istnieje funkcjonał $\lambda: \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ taki, że dla każdego $X \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ mamy

$$\pi(X) = \lambda(X)\mathbb{1}.$$

WNIOSEK

Nieprzywiedlna zespolona reprezentacja przemiennej algebry lub macierzowej grupy Liego jest jednowymiarowa.

- Korzystając z wiedzy o związkach homomorfizmów grup i algebr Liego otrzymujemy:

Twierdzenie

Niech G będzie jednospójną macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$. Jeśli $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ jest reprezentacją $\mathfrak{g}$, to istnieje jedyna reprezentacja Π grupy G na V taka, że $\Pi(e^X) = e^{\pi(X)}$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$.

DEFINICJA

Niech G będzie spójną macierzową grupą Liego. **Nakrycie uniwersalne** G jest to jednospójna grupa Liego $\widetilde{G}$ wraz z homomorfizmem $\Phi: \widetilde{G} \rightarrow G$ takim, że

- ❶ Φ jest surjekcją,
- ❷ istnieje otoczenie $e \in \widetilde{G}$ odwzorowywane przez Φ homeomorficznie na otoczenie $e \in G$.

TWIERDZENIE

Niech G będzie macierzową grupą Liego. Wtedy

- ❶ nakrycie uniwersalne G istnieje,
- ❷ jeśli $(\widetilde{G}_1, \Phi_1)$ i $(\widetilde{G}_2, \Phi_2)$ są nakryciami uniwersalnymi G , to istnieje izomorfizm grup Liego $\Psi: \widetilde{G}_1 \rightarrow \widetilde{G}_2$ taki, że $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$,
- ❸ jeśli G i $\widetilde{G}$ są macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\widetilde{\mathfrak{g}}$, to homomorfizm algebr Liego $\phi: \widetilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ stowarzyszony z Φ jest izomorfizmem.
- ❹ Jeśli $\widetilde{G}$ jest jednospójną macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\widetilde{\mathfrak{g}}$, a $\Phi: \widetilde{G} \rightarrow G$ jest homomorfizmem indukującym izomorfizm $\widetilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$, to $(\widetilde{G}, \Phi)$ jest nakryciem uniwersalnym G .

PRZYKŁADY

- ❶ Nakryciem uniwersalnym $\mathbb{T}$ jest $\mathbb{R}$ wraz z homomorfizmem $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{2\pi it} \in \mathbb{T}$.
- ❷ Nakryciem uniwersalnym $\mathrm{SO}(3)$ jest $\mathrm{SU}(2)$ wraz z homomorfizmem $\Phi: \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ skonstruowanym w poprzednim semestrze.

- Z udowodnionych wcześniej faktów na temat jednospójnych grup Liego otrzymujemy natychmiast:

TWIERDZENIE

Niech G i H będą macierzowymi grupami Liego z algebrami Liego $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$. Przypuśćmy, że $\widetilde{G}$ jest macierzową grupą Liego i dokonajmy utożsamienia algebry Liego $\widetilde{G}$ z $\mathfrak{g}$. Niech $\psi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Wówczas istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup Liego $\Psi: \widetilde{G} \rightarrow H$ taki, że ψ jest stowarzyszonym z nim homomorfizmem algebr Liego.

WNIOSEK

Niech G będzie macierzową grupą Liego z algebrą Liego $\mathfrak{g}$ i przypuśćmy, że $\widetilde{G}$ także jest macierzową grupą Liego. Utożsammy algebrę Liego grupy $\widetilde{G}$ z $\mathfrak{g}$ i niech $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ będzie reprezentacją $\mathfrak{g}$. Wówczas istnieje jedyna reprezentacja $\widetilde{\Pi}$ grupy $\widetilde{G}$ na V taka, że dla każdego $X \in \mathfrak{g}$

$$\pi(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \widetilde{\Pi}(e^{tX}).$$

- Ponieważ grupa $SU(n)$ jest jednospójna, skończenie wymiarowe reprezentacje $SU(n)$ są w bijekcji z zespolonymi reprezentacjami $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.
- Bijekcja ta zachowuje równoważność i nieprzywiedlność.
- Tak więc, aby zbadać reprezentacje grupy $SU(3)$, rozważymy zespolone reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

- Algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ma bazę $\{H_1, H_2, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$, gdzie

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Mamy $[H_1, H_2] = 0$, a układy $\{H_1, X_1, Y_1\}$ i $\{H_2, X_2, Y_2\}$ spełniają reguły komutacyjne dla rozważanej wcześniej bazy $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$[H_i, X_i] = 2X_i, \quad [H_i, Y_i] = -2Y_i, \quad [X_i, Y_i] = H_i$$

dla $i = 1, 2$.

- Widzimy więc, że podprzestrzenie rozpinane przez układy $\{H_1, X_1, Y_1\}$ i $\{H_2, X_2, Y_2\}$ są podalgebrami Liego izomorficznymi z $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
- Pozostałe komutatory są takie

$$\begin{array}{llll} [H_1, X_2] = -X_2, & [H_1, Y_2] = Y_2, & [H_1, X_3] = X_3, & [H_1, Y_3] = -Y_3, \\ [H_2, X_1] = -X_1, & [H_2, Y_1] = Y_1, & [H_2, X_3] = X_3, & [H_2, Y_3] = -Y_3, \\ [X_1, X_2] = X_3, & [X_1, X_3] = 0, & [X_1, Y_2] = 0, & [X_1, Y_3] = -Y_2, \\ [Y_1, X_2] = 0, & [Y_1, X_3] = X_2, & [Y_1, Y_2] = -Y_3, & [Y_1, Y_3] = 0, \\ [X_2, Y_1] = 0, & [X_2, Y_3] = 0, & [X_3, Y_1] = -X_2, & [X_3, Y_2] = X_1 \end{array}$$

oraz $[X_3, Y_3] = H_1 + H_2$.