

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 14.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

- Ponieważ grupa $SU(n)$ jest jednospójna, skończenie wymiarowe reprezentacje $SU(n)$ są w bijekcji z zespolonymi reprezentacjami $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.
- Bijekcja ta zachowuje równoważność i nieprzywiedlność.
- Tak więc, aby zbadać reprezentacje grupy $SU(3)$, rozważymy zespolone reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.
- Reprezentacje $SU(3)$, a więc i nieprzywiedlne zespolone reprezentacje $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ są w pełni redukowalne (i reprezentacje nieprzywiedlne są skończenie wymiarowe)

- Algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ma bazę $\{H_1, H_2, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$, gdzie

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Mamy $[H_1, H_2] = 0$, a układy $\{H_1, X_1, Y_1\}$ i $\{H_2, X_2, Y_2\}$ spełniają reguły komutacyjne dla rozważanej wcześniej bazy $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$[H_i, X_i] = 2X_i, \quad [H_i, Y_i] = -2Y_i, \quad [X_i, Y_i] = H_i$$

dla $i = 1, 2$.

- Widzimy więc, że podprzestrzenie rozpinane przez układy $\{H_1, X_1, Y_1\}$ i $\{H_2, X_2, Y_2\}$ są podalgebrami Liego izomorficznymi z $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
- Pozostałe komutatory są takie

$$\begin{array}{llll} [H_1, X_2] = -X_2, & [H_1, Y_2] = Y_2, & [H_1, X_3] = X_3, & [H_1, Y_3] = -Y_3, \\ [H_2, X_1] = -X_1, & [H_2, Y_1] = Y_1, & [H_2, X_3] = X_3, & [H_2, Y_3] = -Y_3, \\ [X_1, X_2] = X_3, & [X_1, X_3] = 0, & [X_1, Y_2] = 0, & [X_1, Y_3] = -Y_2, \\ [Y_1, X_2] = 0, & [Y_1, X_3] = X_2, & [Y_1, Y_2] = -Y_3, & [Y_1, Y_3] = 0, \\ [X_2, Y_1] = 0, & [X_2, Y_3] = 0, & [X_3, Y_1] = -X_2, & [X_3, Y_2] = X_1 \end{array}$$

oraz $[X_3, Y_3] = H_1 + H_2$.

- Niech π będzie zespoloną reprezentacją $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.
- Wówczas operatory $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$ są przemienne, a więc są wspólnie diagonalizowalne.
- Stąd istnieją wspólne wektory własne dla $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$.

DEFINICJA

Niech π będzie zespoloną reprezentacją $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ na przestrzeni V . **Wagą** dla reprezentacji π nazywamy parę liczb zespolonych (μ_1, μ_2) taką, że istnieje $v \in V \setminus \{0\}$ taki, że

$$\pi(H_1)v = \mu_1 v, \quad \pi(H_2)v = \mu_2 v,$$

Taki wektor v nazywamy **wektorem wagowym** dla wagi (μ_1, μ_2) , a podprzestrzeń złożoną ze wszystkich takich wektorów (wspólną podprzestrzeń własną $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$ dla wartości własnych μ_1 i μ_2) nazywamy **podprzestrzenią wagową** reprezentacji π dla wagi (μ_1, μ_2) .

STWIERDZENIE

- ❶ Każda zespolona reprezentacja $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ma co najmniej jedną wagę.
- ❷ Każda waga jest postaci (m_1, m_2) , gdzie $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

Dowód

Niech π będzie zespoloną reprezentacją $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ na przestrzeni wektorowej V . Zauważmy, że obcinając π do podalgebr $\text{span}\{H_1, X_1, Y_1\}$ i $\text{span}\{H_2, X_2, Y_2\}$ otrzymujemy zespolone reprezentacje algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, a więc wartości własne $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$ są liczbami całkowitymi. Dalej operatory $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$ są przemienne i mogą być wspólnie zdiagonalizowane, a więc musi istnieć niezerowy wspólny wektor własny dla $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$. □

- Rozważmy teraz reprezentację dołączoną ad: $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}))$.

DEFINICJA

Pierwiastkiem algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ nazywamy niezerową wagę $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ dla reprezentacji ad. Wektor wagowy dla pierwiastka α , tj. element $Z \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ taki, że

$$[H_1, Z] = \alpha_1 Z, \quad [H_2, Z] = \alpha_2 Z$$

nazywamy **wektorem pierwiastkowym**.

TWIERDZENIE

Algebra $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ma sześć pierwiastków:

$$(2, -1), \quad (-1, 2), \quad (1, 1), \quad (-2, 1), \quad (1, -2), \quad (-1, -1).$$

- Poniższa tabela zawiera przykładowe wektory wagowe Z dla wszystkich pierwiastków:

α	$(2, -1)$	$(-1, 2)$	$(1, 1)$	$(-2, 1)$	$(1, -2)$	$(-1, -1)$
Z	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3

DOWÓD TWIERDZENIA

Istnienie wymienionych w twierdzeniu pierwiastków sprawdzamy obliczając nawiasy H_1 i H_2 z wektorami Z zaproponowanymi w tabeli.

Teraz niech α będzie pierwiastkiem $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Ponieważ H_1 i H_2 są przemienne, wektor pierwiastkowy Z dla α można wybrać z podprzestrzeni $\text{span}\{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$. Tak więc mamy $Z = \sum a^i X_i + \sum b^i Y_i$ i

$$[H_1, a^1 X_1 + a^2 X_2 + a^3 X_3 + b^1 Y_1 + b^2 Y_2 + b^3 Y_3] = \alpha_1 (a^1 X_1 + a^2 X_2 + a^3 X_3 + b^1 Y_1 + b^2 Y_2 + b^3 Y_3),$$

$$[H_2, a^1 X_1 + a^2 X_2 + a^3 X_3 + b^1 Y_1 + b^2 Y_2 + b^3 Y_3] = \alpha_2 (a^1 X_1 + a^2 X_2 + a^3 X_3 + b^1 Y_1 + b^2 Y_2 + b^3 Y_3).$$

W takim razie kombinacje liniowe

$$\begin{aligned} & a^1(2 - \alpha_1)X_1 - a^2(1 + \alpha_1)X_2 + a^3(1 - \alpha_1)X_3 - b^1(2 + \alpha_1)Y_1 + b^2(1 - \alpha_1)Y_2 - b^3(1 + \alpha_1)Y_3, \\ & -a^1(1 + \alpha_2)X_1 - a^2(2 + \alpha_2)X_2 + a^3(1 - \alpha_2)X_3 - b^1(1 - \alpha_2)Y_1 - b^2(2 + \alpha_2)Y_2 - b^3(1 + \alpha_2)Y_3 \end{aligned}$$

muszą być zerowe.

□

TWIERDZENIE 1

Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ będzie pierwiastkiem i niech Z_α będzie odpowiadającym mu wektorem pierwiastkowym. Niech π będzie zespoloną reprezentacją $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ i niech $\mu = (m_1, m_2)$ będzie wagą dla π , a v wektorem wagowym dla μ . Wówczas $\pi(Z_\alpha)v = 0$ lub $\pi(Z_\alpha)v$ jest wektorem wagowym dla $\mu + \alpha = (m_1 + \alpha_1, m_2 + \alpha_2)$.

Dowód

Z relacji $[H_1, Z_\alpha] = \alpha_1 Z_\alpha$ otrzymujemy $\pi(H_1)\pi(Z_\alpha) - \pi(Z_\alpha)\pi(H_1) = \alpha_1\pi(Z_\alpha)$, a więc

$$\begin{aligned}\pi(H_1)(\pi(Z_\alpha)v) &= (\pi(Z_\alpha)\pi(H_1) + \alpha_1\pi(Z_\alpha))v \\ &= \pi(Z_\alpha)m_1v + \alpha_1\pi(Z_\alpha)v = (m_1 + \alpha_1)\pi(Z_\alpha)v\end{aligned}$$

i tak samo $\pi(H_2)(\pi(Z_\alpha)v) = (m_2 + \alpha_2)\pi(Z_\alpha)v$.

□

TWIERDZENIE 2

Niech $\pi: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ będzie nieprzywiedlną zespoloną reprezentacją. Wówczas V jest sumą prostą podprzestrzeni wagowych dla π .

Dowód

Niech W będzie sumą prostą wszystkich podprzestrzeni wagowych dla π . Wtedy $W \neq \{0\}$, bo π ma pewną wagę. Ponadto W jest podprzestrzenią niezmienniczą dla π :

- operatory $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$ oczywiście zachowują W ,
- dla $X \in \{X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\}$ operator $\pi(X)$ przeprowadza wektory wagowe na inne wektory wagowe (lub zero). □

- Wyróżnijmy dwa pierwiastki:

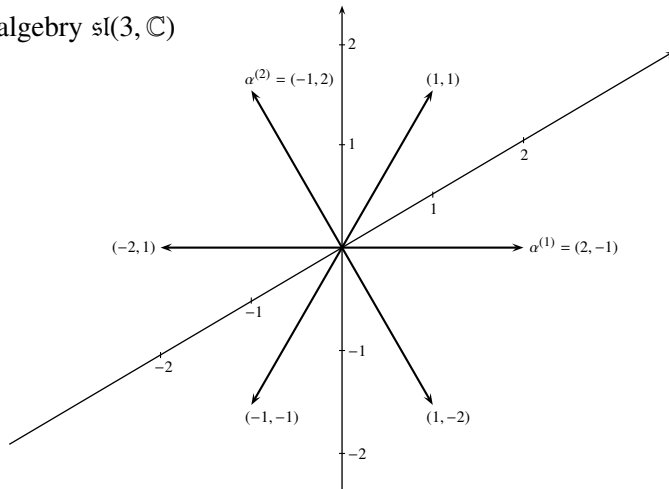
$$\alpha^{(1)} = (2, -1) \quad \alpha^{(2)} = (-1, 2).$$

- Będziemy je nazywać **pierwiastkami prostymi**.
- Dowolny pierwiastek można wyrazić jako kombinację liniową $\alpha^{(1)}$ i $\alpha^{(2)}$ z całkowitymi współczynnikami n_1, n_2 takimi, że $n_1 n_2 \geq 0$.
- Konkretnie:

$$\begin{aligned} (2, -1) &= \alpha^{(1)}, & (-2, 1) &= -\alpha^{(1)}, & (1, 1) &= \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}, \\ (-1, 2) &= \alpha^{(2)}, & (1, -2) &= -\alpha^{(2)}, & (-1, -1) &= -\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}. \end{aligned}$$

- Dokonany przez nas wybór pierwiastków prostych nie jest jedynym o powyższej własności (np. para $(-\alpha^{(1)}, -\alpha^{(2)})$ także pozwala wyrazić każdy pierwiastek w podobny sposób).

Pierwiastki algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$



DEFINICJA

Niech μ i ν będą wagami dla pewnej reprezentacji algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Powiemy, że μ jest **wyższa** niż ν (zapis: $\mu \geq \nu$), jeśli istnieją rzeczywiste $a, b \geq 0$ takie, że

$$\mu - \nu = a\alpha^{(1)} + b\alpha^{(2)}.$$

Wagę μ dla π nazwiemy **najwyższą**, jeśli dla każdej wagi μ' dla π mamy $\mu \geq \mu'$.

- Relacja $\geq$ jest częściowym porządkiem na zbiorze wag.

DEFINICJA

Zespoloną reprezentację π algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ na przestrzeni V nazywamy **reprezentacją cykliczną najwyższej wagi** $\mu = (m_1, m_2)$, jeśli istnieje $v \in V \setminus \{0\}$ taki, że

- v jest wektorem wagowym dla μ ,
- $\pi(X_1)v = \pi(X_2)v = 0$,
- najmniejsza podprzestrzeń niezmiennicza dla π zawierająca v jest równa V .

Wektor v nazywamy **cyklicznym** dla reprezentacji π .

TWIERDZENIE 3

Niech $\pi: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ będzie reprezentacją cykliczną najwyższej wagi μ . Wtedy

- 1 π ma najwyższą wagę μ ,
- 2 podprzestrzeń wagowa dla μ jest jednowymiarowa.

UWAGA

Relacja $\geq$ na zbiorze wag dla danej reprezentacji jest tylko częściowym porządkiem, a więc mogą istnieć wagi, których nie da się porównać. Tak więc istnienie najwyższej wagi w reprezentacji cyklicznej najwyższej wagi μ jest nietrywialnym faktem — wszystkie inne wagi dla takiej reprezentacji są porównywalne z μ i μ jest od nich wyższa. Jest jasne, że najwyższa waga dla danej reprezentacji jest jedyna — wynika to z antysymetrii relacji $\geq$.

DOWÓD TWIERDZENIA

Niech $v \in V$ będzie wektorem cyklicznym dla π i niech W będzie podprzestrzenią rozpiętą przez wszystkie wektory postaci

$$\pi(Y_{i_1})\pi(Y_{i_2})\cdots\pi(Y_{i_n})v, \quad n \in \mathbb{Z}_+, i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}.$$

Podprzestrzeń W jest oczywiście niezmiennicza dla operatorów $\pi(Y_1)$ i $\pi(Y_2)$, a więc także dla $\pi(Y_3) = [\pi(Y_1), \pi(Y_2)]$.

Podprzestrzeń W jest także niezmiennicza dla operatorów $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$, bo F_1 i F_2 są wektorami pierwiastkowymi, a więc przeprowadzają wektor wagowy (wspólny wektor własny $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$) na wektor wagowy (lub zero). Stąd każdy wektor postaci $\pi(Y_{i_1})\pi(Y_{i_2})\cdots\pi(Y_{i_n})v$ jest wspólnym wektorem własnym $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$.

Poniżej pokażemy, że W jest także niezmiennicza dla operatorów $\pi(X_1)$ i $\pi(X_2)$.

DOWÓD TWIERDZENIA

Niech $w = \pi(Y_{i_1})\pi(Y_{i_2}) \cdots \pi(Y_{i_n})v$. Aby pokazać, że $\pi(X_1)w, \pi(X_2)w \in W$ zastosujemy indukcję po n . Dla $n = 0$ mamy $w = v$ i $\pi(X_1)v = \pi(X_2)v = 0 \in W$.

Teraz niech $n > 0$. Przypomnijmy, że

$$[X_1, Y_1] = H_1, \quad [X_2, Y_1] = 0 = [X_1, Y_2], \quad [X_2, Y_2] = H_2,$$

a więc dla $i, j \in \{1, 2\}$ mamy $\pi(X_i)\pi(Y_j) = \pi(Y_j)\pi(X_i) + H_{i,j}$, gdzie $H_{i,j}$ jest pewnym elementem zbioru $\{H_1, H_2, 0\}$. Wynika stąd, że

$$\pi(X_i)w = \pi(X_i)\pi(Y_{i_1})\pi(Y_{i_2}) \cdots \pi(Y_{i_n})v = \pi(Y_{i_1})\pi(X_i)\pi(Y_{i_2}) \cdots \pi(Y_{i_n})v + \pi(H_{i,j})\pi(Y_{i_1})\pi(Y_{i_2}) \cdots \pi(Y_{i_n})v.$$

pierwszy składnik po prawej stronie należy do W na mocy założenia indukcyjnego, a drugi na mocy rozumowania przedstawionego wcześniej. To pokazuje, że operatory $\pi(X_1)$ i $\pi(X_2)$ zachowują W .

DOWÓD TWIERDZENIA

Wykazaliśmy już, że W jest niezmiennicza dla każdego z operatorów

$$\pi(H_1), \quad \pi(H_2), \quad \pi(Y_1), \quad \pi(Y_2), \quad \pi(X_1), \quad \pi(X_2),$$

a w konsekwencji także dla $[\pi(X_1), \pi(X_2)] = \pi(X_3)$. Wynika stąd, że W jest podprzestrzenią niezmienniczą dla reprezentacji π .

Z konstrukcji W wynika, że jest ona najmniejszą podprzestrzenią niezmienniczą zawierającą v , a więc $W = V$. Oznacza to, że V jest rozpinana przez wektor wagowy v dla wagi μ i wektory postaci $\pi(Y_{i_1})\pi(Y_{i_2}) \cdots \pi(Y_{i_n})v$, które są wektorami wagowymi dla wag (ściśle) niższych niż μ (konkretnie, $\pi(Y_{i_1})\pi(Y_{i_2}) \cdots \pi(Y_{i_n})v$ jest wektorem wagowym dla wagi $\mu - \alpha^{(i_1)} - \cdots - \alpha^{(i_m)}$). W szczególności μ jest najwyższą wagą dla π .

Wreszcie skoro $V = \text{Span}\{v\} \cup (\text{wektory wagowe dla niższych wag})$, podprzestrzeń wagowa dla μ musi być jednowymiarowa. $\square$

TWIERDZENIE 4

Każda skończona wymiarowa nieprzywiedlna zespolona reprezentacja algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ jest reprezentacją cykliczną z najwyższą wagą.

Dowód

Niech π będzie nieprzywiedlną zespoloną reprezentacją $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Wykazaliśmy już, że π jest sumą prostą podprzestrzeni wagowych, a skoro jest skończona wymiarowa, wag jest skończenie wiele. W konsekwencji musi istnieć maksymalna waga μ tj. taka, że nie istnieje waga $\mu' \neq \mu$ spełniająca $\mu' \geq \mu$. To jeszcze nie znaczy, że μ jest najwyższa. Oznacza to jednak, że jeśli v jest wektorem wagowym dla μ , to $\pi(X_1)$ i $\pi(X_2)$ muszą zerować v (inaczej $\pi(E_i)v$ byłby wektorem wagowym dla wagi $\mu + \alpha^{(i)}$ ściśle wyższej niż μ). Dalej, skoro π jest nieprzywiedlna, najmniejsza podprzestrzeń niezmiennicza zawierająca (niezerowy) wektor v musi być całą przestrzenią reprezentacji π , a więc π jest cykliczna i ma najwyższą wagę (wszystkie pozostałe są postaci $\mu - k\alpha^{(1)} - l\alpha^{(2)}$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $(k, l) \neq (0, 0)$). □