

TEORIA GRUP II – WYKŁAD 15.

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2025/2026

TWIERDZENIE 5

Każda cykliczna reprezentacja $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ z najwyższą wagą jest nieprzywiedlna.

Dowód

Niech $\pi : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ będzie reprezentacją cykliczną z najwyższą wagą μ i niech v będzie wektorem wagowym dla μ (takim jak w definicji reprezentacji najwyższej wagi μ). Wiemy, że π rozkłada się na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, a więc

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i,$$

gdzie $V_1, \dots, V_n$ są nieprzywiedlnymi podprzestrzeniami niezmienniczymi. Twierdzenie 2 mówi, że każda V_i jest sumą prostą podprzestrzeni wagowych, a więc podprzestrzeń wagowa dla najwyższej wagi μ musi być wagą którejś z reprezentacji V_i . Z drugiej strony podprzestrzeń wagowa dla μ w V jest jednowymiarowa (twierdzenie 3), czyli v jest jedynym wektorem wagi μ (z dokładnością do proporcjonalności). W szczególności v musi należeć do V_i . Skoro najmniejszą podprzestrzenią niezmienniczą zawierającą v jest V , otrzymujemy $V_i = V$, a więc π jest nieprzywiedlna. □

TWIERDZENIE 6

Dwie nieprzywiedlne reprezentacje z tą samą najwyższą wagą są równoważne.

Dowód

Niech $\pi: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ i $\rho: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$ będą nieprzywiedlne o tej samej najwyższej wadze μ i niech $v \in V$, $w \in W$ będą wektorami cyklicznymi dla π i ρ (jak w definicji).

Rozważmy reprezentację $\pi \oplus \rho$ na $V \oplus W$ i wektor $(v, w) \in V \oplus W$. Teraz niech θ będzie podreprezentacją wyznaczoną przez najmniejszą niezmienniczą podprzestrzeń $U \subset V \oplus W$ zawierającą (v, w) . Jest jasne, że θ jest cykliczna z najwyższą wagą μ , a więc na mocy twierdzenia 5, jest ona nieprzywiedlna. Zauważmy też, że rzutowania $P_V: V \oplus W \rightarrow V$ i $P_W: V \oplus W \rightarrow W$ splatają $\pi \oplus \rho$ odpowiednio z π i ρ , a w konsekwencji $P_V|_U \in \text{Mor}(\theta, \pi)$ i $P_W|_U \in \text{Mor}(\theta, \rho)$. Co więcej operatory te są niezerowe, gdyż przeprowadzają (v, w) odpowiednio na v i w . Oznacza to, że reprezentacje π i θ są równoważne i reprezentacje ρ i θ są równoważne, a więc $\pi \approx \rho$. $\square$

TWIERDZENIE 7

Niech π będzie nieprzywiedlną zespoloną reprezentacją $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$. Wówczas najwyższa waga dla π jest postaci $\mu = (m_1, m_2)$ dla pewnych $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$.

DOWÓD

Wiemy już, że $\mu = (m_1, m_2)$ dla pewnych $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Musimy pokazać, że liczby te są nieujemne. Reprezentacja π obcięta do każdej z podalgebr $\text{span}\{H_1, X_1, Y_1\}$ i $\text{span}\{H_2, X_2, Y_2\}$ jest reprezentacją $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Dalej, jeśli v jest wektorem wagowym dla najwyższej wagi reprezentacji π , to $\pi(X_1)v = \pi(X_2)v = 0$. Wynika stąd, że wartości własne m_1 i m_2 operatorów $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$ na wektorze v są nieujemne. □

PODSUMOWANIE

- ❶ Każda nieprzywiedlna zespolona reprezentacja $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ jest cykliczną reprezentacją z najwyższą wagą.
 - ❷ Każda cykliczna reprezentacja $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ z najwyższą wagą jest nieprzywiedlna.
 - ❸ Dwie nieprzywiedlne reprezentacje z tą samą najwyższą wagą są równoważne.
 - ❹ Najwyższa waga nieprzywiedlnej zespolonej reprezentacji $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ jest postaci $\mu = (m_1, m_2)$ dla pewnych $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$.
 - ❺ Dla dowolnych $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ istnieje zespolona reprezentacja $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ najwyższej wagi (m_1, m_2) .
- Poniżej zajmiemy się jedynym nie udowodnionym jeszcze punktem ❺.

PRZYKŁAD – REPREZENTACJA NAJWYŻSZEJ WAGI $(0, 0)$

Trywialna reprezentacja

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \ni x \mapsto 0 \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$$

jest nieprzywiedlna i jest jasne, że jest to reprezentacja najwyższej wagi $(0, 0)$. Wektorem cyklicznym jest dowolny niezerowy wektor $v \in \mathbb{C}$.

PRZYKŁAD – REPREZENTACJA NAJWYŻSZEJ WAGI (1, 0)

Rozważmy trójwymiarową reprezentację definiującą $\pi: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$. Reprezentacja ta jest nieprzywiedlna, gdyż jeśli $V \subset \mathbb{C}^3$ jest podprzestrzenią niezmienniczą i $v = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ jest niezerowym wektorem, to $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Operatory $\pi(X_1)\pi(Y_1)$, $\pi(X_2)\pi(Y_2)$ i $\pi(X_3)\pi(Y_3)$ są rzutami na osie współrzędnych, a więc któryś wektor bazowy należy do V .

- Jeśli $e_1 \in V$, to $e_2 = \pi(Y_1)e_1$ oraz $e_3 = \pi(Y_3)e_1 \in V$,
- jeśli $e_2 \in V$, to $e_1 = \pi(X_1)e_2$ oraz $e_3 = \pi(Y_2)e_2 \in V$,
- jeśli $e_3 \in V$, to $e_1 = \pi(X_3)e_3$ oraz $e_2 = \pi(X_2)e_3 \in V$.

Oznacza to, że V zawiera bazę przestrzeni $\mathbb{C}^3$, czyli $V = \mathbb{C}^3$.

Baza standardowa $\mathbb{C}^3$ jest wspólną bazą własną dla $\pi(H_1)$ i $\pi(H_2)$, a konkretnie wektory e_1, e_2 i e_3 są wektorami wagowymi z wagami $(1, 0)$, $(-1, 1)$ i $(0, -1)$. Mamy też

$$(1, 0) - (-1, 1) = \alpha^{(1)} \quad \text{ i } \quad (1, 0) - (0, -1) = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)},$$

skąd natychmiast wynika, że $(1, 0)$ jest najwyższą wagą dla π . Wektorem cyklicznym jest np. e_3 .

PRZYKŁAD – REPREZENTACJA NAJWYŻSZEJ WAGI $(0, 1)$

Niech $\pi: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ będzie reprezentacją definiującą i rozważmy reprezentację

$$\pi^c: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \ni x \longmapsto -\pi(x)^\top \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$$

($\top$ oznacza transpozycję). Podobnie jak π , reprezentacja ta jest nieprzywiedlna.

Wektory e_1, e_2 i e_3 bazy standardowej $\mathbb{C}^3$ są wektorami wagowymi dla π^c z wagami odpowiednio $(-1, 0)$, $(1, -1)$ i $(0, 1)$ i mamy

$$(0, 1) - (-1, 0) = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \quad \text{i} \quad (0, 1) - (1, -1) = \alpha^{(2)},$$

czyli $(0, 1)$ jest najwyższą wagą dla π^c . Ponownie wektorem cyklicznym jest np. wektor e_3 .

PRZYKŁAD – REPREZENTACJA NAJWYŻSZEJ WAGI (m_1, m_2)

Niech π i π^c nadal oznaczają reprezentacje najwyższej wagi $(1, 0)$ i $(0, 1)$ opisane powyżej i oznaczmy przestrzeń $\mathbb{C}^3$, na której obie działają symbolami V (dla π) i V^c (dla π^c).

Na $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{m_1} \otimes \underbrace{V^c \otimes \cdots \otimes V^c}_{m_2}$ mamy reprezentację $\widetilde{\pi}_{m_1, m_2}$ zdefiniowaną wzorem

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\pi}_{m_1, m_2}(x) = & \pi(x) \otimes \mathbb{1}_V \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{V^c} \\
 & + \mathbb{1}_V \otimes \pi(x) \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{V^c} \\
 & \quad \vdots \\
 & + \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_V \otimes \cdots \otimes \pi(x) \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{V^c} \\
 & + \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_V \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_V \otimes \pi^c(x) \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{V^c} \\
 & + \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_V \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \pi^c(x) \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_{V^c} \\
 & \quad \vdots \\
 & + \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_V \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_V \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \mathbb{1}_{V^c} \otimes \cdots \otimes \pi^c(x).
 \end{aligned}$$

PRZYKŁAD – REPREZENTACJA NAJWYŻSZEJ WAGI (m_1, m_2)

Niech v i v^c będą wektorami wagowymi najwyższej wagi dla π i π^c . Wówczas

$$w_{m_1, m_2} = \underbrace{v \otimes \cdots \otimes v}_{m_1} \otimes \underbrace{v^c \otimes \cdots \otimes v^c}_{m_2}$$

jest wektorem wagowym dla $\widetilde{\pi}_{m_1, m_2}$ wagi (m_1, m_2) . Ponadto

$$\widetilde{\pi}_{m_1, m_2}(X_1)v_{m_1, m_2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \widetilde{\pi}_{m_1, m_2}(X_2)v_{m_1, m_2} = 0.$$

Co prawda reprezentacja $\widetilde{\pi}_{m_1, m_2}$ nie jest nieprzywiedlna (chyba że $(m_1, m_2) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$), ale możemy zdefiniować W jako najmniejszą podprzestrzeń niezmienniczą dla $\widetilde{\pi}_{m_1, m_2}$ zawierającą wektor v_{m_1, m_2} . Wówczas W wyznacza nieprzywiedlną reprezentację

$$\pi_{m_1, m_2}: \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$$

najwyższej wagi (m_1, m_2) .

PRZYKŁAD – REPREZENTACJA NAJWYŻSZEJ WAGI (m_1, m_2)

- Dla dowolnych (m_1, m_2) istnieje reprezentacja Π_{m_1, m_2} grupy SU(3) taka, że $\pi_{m_1, m_2}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Pi_{m_1, m_2}(e^{tx})$ dla wszystkich $x \in \mathfrak{su}(3)$.
- Jest to konsekwencją ogólnych twierdzeń (SU(3) jest spójna i jednospójna).
- Reprezentację Pi_{m_1, m_2} można też skonstruować wprost jako odpowiednią podreprezentację iloczynu tensorowego $\Pi_{1,0}^{\otimes m_1} \otimes \Pi_{0,1}^{\otimes m_2}$, gdzie
 - $\Pi_{1,0}$ jest reprezentacją definiującą SU(3) na $\mathbb{C}^3$,
 - $\Pi_{0,1} = \Pi_{1,0}^c$.