

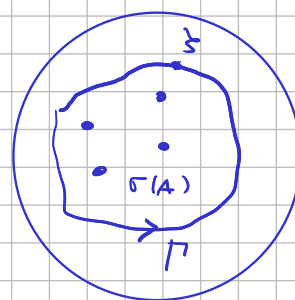
## FUNKCJE OD MACIERZY

- $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ,  $f$ -FUNKCJA,  $f(A) = ?$
- OZNACZENIE:  $\sigma(A)$  - WIDMO MACIERZY  $A$  = ZBIÓR WARTOŚCI WŁASNYCH  
 $C \subseteq \mathbb{C}$  - PODZBIÓR DOMKNIĘTY  $\text{Hol}(C)$  = ZBIÓR FUNKCJI  
HOLOMORFICZNYCH NA ODCZĘCIU  $C$ .  
 $\text{Hol}(C)$  - ALGEBRA Z JEDYNKĄ
- DLA  $f \in \text{Hol}(\sigma(A))$  DEFINIOWEMY

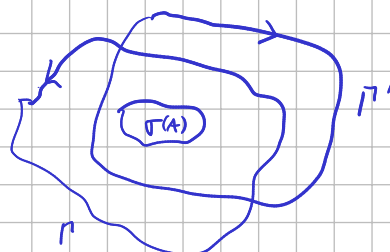
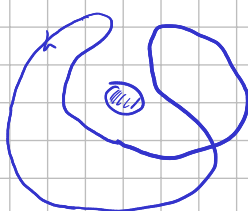
$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) (zI - A)^{-1} dz$$

GDZIE  $\Gamma$  - DODATNIO ZORIENTOWANY KONTUR OJĄCZĄCY  $\sigma(A)$   
W DZIEDZINIE  $f$ .

- UWAGA:  $f(A)$  NIE ZALEŻY OD WYBORU  $\Gamma$   
 $\Gamma'$  - INNY KONTUR

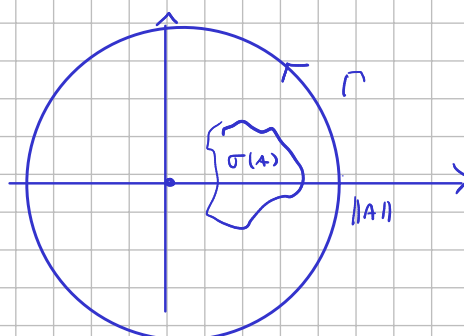


$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) (zI - A)^{-1} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(z) (zI - A)^{-1} dz = 0.$$



STW. JEŚLI  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , TO  $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ .

DOWÓD PRZYPADEK 1°  $f(z) = z^m$



NIECH  $\Gamma$  - OKRĄG O ŚRODKU  $W$  O PROMIĘNIU  $r > \|A\|$

1) a)  $\lambda \in \Gamma$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} (I - \frac{1}{\lambda} A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} A^n$$

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\Gamma} \lambda^{m-n-1} A^n d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda^{m-n-1} d\lambda}_{\delta_{m,n}} A^n = A^m \end{aligned}$$

STĄD JEŚLI  $f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_m z^m$ , TO  $f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \dots + \alpha_m A^m$

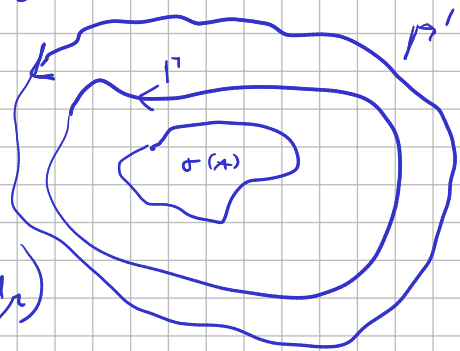
W PRZYPADKU OGÓLNYM  $f$  JEST GRANICĄ (JEDNOSTAJNĄ NA  $\Gamma$ )

CIĄGU WIELOMIANÓW, A ODWZ.  $f \mapsto f(A)$  JEST CIĄGŁE

W NORMIE  $\|\cdot\|_{\infty}$ . STĄD  $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n$ .

Tw. ODWZOROWANIE  $\text{Hol}(\sigma(A)) \ni f \mapsto f(A) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  JEST  
MULTYLIKATYWNE.  $(f, g \in \text{Hol}(\sigma(A)), (fg)(A) = f(A)g(A))$

Dowód WZĘMY  $f, g \in \text{Hol}(\sigma(A))$  I NIECH  $\Gamma$  I  $\Gamma'$  BĘDĄ  
KONTURAMI ZAWARTYMI W OBSZARACH HOLOMORFICZNOŚCI  $f$  I  $g$   
I TAKIŻ, ŻE  $\Gamma'$  LEŻY NA ZEWNĄTRZ  $\Gamma$



$$f(A)g(A) =$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda \right) \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} g(\mu) (\mu I - A)^{-1} d\mu \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} f(\lambda) g(\mu) \underbrace{(\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A)^{-1}}_{(\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A)^{-1}} d\mu d\lambda$$

$$(\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A)^{-1} = (\mu - \lambda)^{-1} \left( (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \right) \quad \checkmark$$

$$= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda d\mu - \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \oint_{\Gamma} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\lambda)g(\mu)}{\mu - \lambda} (\mu I - A)^{-1} d\lambda d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{g(\lambda)}{\lambda - \lambda} d\lambda \right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} g(\lambda) (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda} d\lambda \right) d\lambda$$

$\nearrow$   
 $= 0$ 
 $\lambda \mapsto \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda}$  — HOŁO NA  $\Gamma'$  W  $\in \mathbb{R}^2$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} \underline{g(\lambda)} d\lambda = (fg)(A).$$

□

Stw. Niech  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  i  $f \in \text{Hol}(\sigma(A))$ . Wtedy  $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ .

Dowód weźmy  $\mu \in \mathbb{C} \setminus f(\sigma(A))$ . Wtedy funkcja

$$h_\mu: \lambda \mapsto \frac{1}{\mu - f(\lambda)}$$

jest holomorficzna na otoczeniu  $\sigma(A)$  i wtedy

$$h_\mu(A)(\mu \mathbb{I} - f(A)) = (\mu \mathbb{I} - f(A)) h_\mu(A) = \mathbb{I}$$

Czli  $\mu \notin \sigma(f(A))$ .

Weźmy teraz  $\mu \in f(\sigma(A))$  tzn.  $\mu = f(\lambda_0)$  dla pewnego

$\lambda_0 \in \sigma(A)$ .

$$\rightarrow \mu - f(\lambda) = f(\lambda_0) - f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda) \frac{f(\lambda_0) - f(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} = (\lambda_0 - \lambda) g(\lambda)$$

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{f(\lambda_0) - f(\lambda)}{\lambda_0 - \lambda} & \lambda \neq \lambda_0 \\ f'(\lambda_0) & \lambda = \lambda_0 \end{cases}$$

$\lambda_0$  jest usuwającą  
osobliwością  
funkcji  $g$

Stosujemy obie strony do  $A$

$$\mu \mathbb{I} - f(A) = (\lambda_0 \mathbb{I} - A) g(A)$$

(2)  $\mu \mathbb{I} - f(A)$  może być odwracalna? Nie!

To oznacza, że  $\mu \in \sigma(f(A))$ .

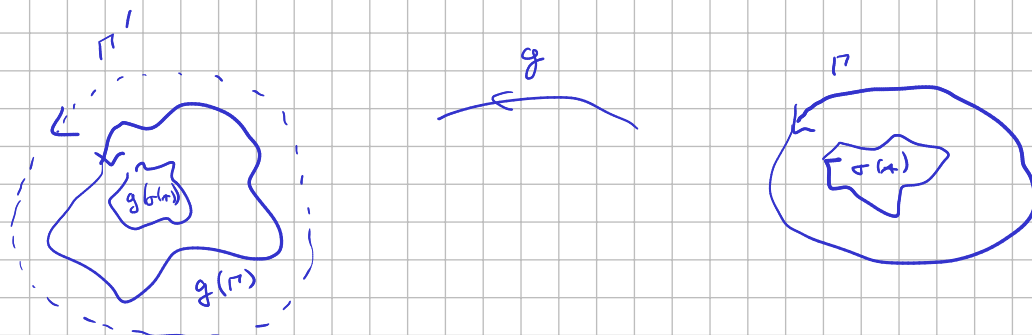
Tw. Niech  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  i  $g \in \text{Hol}(\sigma(A))$ ,  $f \in \text{Hol}(\sigma(g(A)))$

wtedy  $f(g(A)) = (f \circ g)(A)$ .

$$\boxed{\sigma(g(A)) = g(\sigma(A))}$$

$f \circ g \in \text{Hol}(\sigma(A))$

Dowód Niech  $\Gamma$ -kontur wokół  $\sigma(A)$  i niech  $\Gamma'$ -kontur wokół  $\sigma(g(A)) = g(\sigma(A))$  taki, że  $\Gamma' \subset \Gamma$  na zbiorze  $g(\Gamma)$ .



Dla  $\mu \in \Gamma'$  oznaczać  $h_\mu(\lambda) = \frac{1}{\lambda - g(\mu)}$ . Mamy  $h_\mu \in \text{Hol}(\sigma(A))$

poza tym  $h_\mu(A) = (\mu I - g(A))^{-1}$ .

$$\underline{f(g(A))} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\mu) (\mu I - g(A))^{-1} d\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\mu) h_\mu(A) d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} f(\mu) \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - g(\mu)} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda \right) d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\mu)}{\lambda - g(\mu)} d\mu \right) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (f \circ g)(\lambda) (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \underline{(f \circ g)(A)}$$

- $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$   $e^X \leftarrow \text{ZASTOSOWANIE F-CI} \rightarrow e^z$  DO  $X$   

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} e^z (1-z)^{-1} dz$$

- $e^0 = 1$

- $e^X \in GL(n, \mathbb{C})$ ,  $(e^X)^{-1} = e^{-X}$

- $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$

- JEŚLI  $[X, Y] = 0$ , TO  $e^{X+Y} = e^X e^Y$

- DLA DOW.  $C \in GL(n, \mathbb{C})$   $e^{CXC^{-1}} = C e^X C^{-1}$

- $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$

- BYŁO:  $\text{Mat}_n(\mathbb{C}) \ni X \mapsto e^X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  — GŁADKIE

POCHODNA W  $0 \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$

JEST RÓWNA

$$\text{id}: \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C}).$$

$$\|e^X\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{X^n}{n!} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|X^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|X\|^n = e^{\|X\|}$$

Tw. (WZÓR LIEBO-TROTTERA)

DLA DOW.  $X, Y \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  MAMY  $e^{X+Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} \right)^n$

WN. JEŚLI  $[X, Y] = 0$ , TO  $e^{X+Y} = \underline{e^X e^Y}$

MAMY  $[e^{\frac{1}{n}X}, e^{\frac{1}{n}Y}] = 0$

$$e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} \dots e^{\frac{1}{n}X} e^{\frac{1}{n}Y} \\ (e^{\frac{1}{n}X})^n (e^{\frac{1}{n}Y})^n = e^X e^Y.$$

CEL: •  $\forall A \in GL(n, \mathbb{C}) \exists X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$   $A = e^X \leftarrow X = \log A \quad A = e^{\log A}$

•  $\forall B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) \quad B = \log(e^B).$