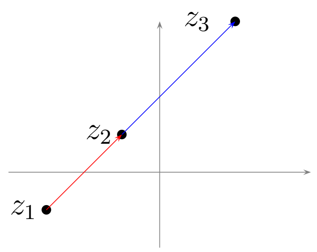
Rozwiązania zadań z kolokwium

Rozwiązanie 1. Dowodzimy $\Longrightarrow$: Jeśli z_1, z_2, z_3 są współliniowe, to $z_2 - z_1$ i $z_3 - z_2$ są proporcjonalne z rzeczywistym współczynnikiem proporcjonalności (traktujemy liczby zespolone jak punkty $\mathbb{R}^2$), zatem



$$z_2 - z_1 = \alpha(z_3 - z_2)$$

i dalej

$$-z_1 + (\alpha + 1)z_2 + (-\alpha)z_3 = 0$$

Jeśli weźmiemy $t_1 = -1$, $t_2 = \alpha + 1$, $t_3 = -\alpha$ otrzymujemy zestaw t_1, t_2, t_3 spełniający wymagane równości. W drugą stronę ($\Longleftarrow$) bierzemy t_1, t_2, t_3 takie, że $t_1 + t_2 + t_3 = 0$, $t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3 = 0$. Przyjmijmy, że $t_1 \neq 0$ (któreś t musi być różne od zera) wtedy

$$z_1 + \frac{t_2}{t_1}z_2 + \frac{t_3}{t_1}z_3 = 0$$

i dalej

$$-z_1 - \frac{t_2}{t_1}z_2 = \frac{t_3}{t_1}z_3$$

$$-z_1 - \frac{t_2}{t_1}z_2 - \frac{t_3}{t_1}z_2 = \frac{t_3}{t_1}z_3 - \frac{t_3}{t_1}z_2$$

$$-z_1 - \frac{t_2 + t_3}{t_1}z_2 = \frac{t_3}{t_1}(z_3 - z_2)$$

ale $t_2 + t_3 = -t_1$ więc

$$-z_1 + z_2 = \frac{t_3}{t_1}(z_3 - z_2)$$

$$z_2 - z_1 = \frac{t_3}{t_1}(z_3 - z_2)$$

Wektory $z_2 - z_1$ i $z_3 - z_2$ są więc proporcjonalne z rzeczywistym współczynnikiem proporcjonalności, zatem z_1, z_2, z_3 leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie 2. Obserwujemy, że $\overline{\bar{b}z} = b\bar{z}$ i nierówność $a + \bar{b}z + b\bar{z} + c|z|^2 \geqslant 0$ przepisujemy w postaci

$$a + 2\Re(\bar{b}z) + c|z|^2 \geqslant 0.$$

Dla $z = 0$ otrzymujemy $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$. Ponieważ $2\Re(\bar{b}z) \in \mathbb{R}$, to także $a + c|z|^2 \in \mathbb{R}$ i skoro $a \in \mathbb{R}$, to także $c \in \mathbb{R}$. Obserwujemy również, że $c \geqslant 0$, bo gdyby było $c < 0$, to dla z o wystarczająco dużym module nierówność $a + 2\Re(\bar{b}z) + c|z|^2 \geqslant 0$ nie byłaby spełniona.

Zapiszmy teraz b i z w postaci biegunowej: $b = \rho e^{i\psi}$, $z = re^{i\varphi}$. Wtedy $\Re(b\bar{z}) = \rho r \cos(\psi - \varphi)$. Nierówność przyjmuje więc postać:

$$a + 2\rho r \cos(\varphi - \psi) + cr^2 \geqslant 0.$$

Lewą stronę potraktujmy jak trójmian kwadratowy względem r. Jeśli nierówność ta ma być spełniona dla wszystkich r to współczynnik przy najwyższej potędze musi być nieujemny $c > 0$. Obserwujemy ponadto, że suma i iloczyn pierwiastków opisane są wzorami

$$r_1 r_2 = \frac{a}{c} > 0, \quad r_1 + r_2 = -\frac{3\rho}{c}\cos(\varphi - \psi)$$

Dodatni iloczyn oznacza, że oba pierwiastki (jeśli są rzeczywiste) są tego samego znaku. Ponieważ φ jest dowolne, może się zdarzyć tak (dla pewnych z), że suma pierwiastków będzie dodatnia, czyli oba pierwiastki dodatnie. To oznaczałoby, że nierówność nie będzie spełniona gdyż pomiędzy pierwiastkami wartość trójmianu będzie ujemna. Musimy więc zapewnić, że nie istnieją rzeczywiste pierwiastki tego trójmianu. Obliczmy wyróżnik:

$$\Delta = 4\rho^2\cos^2(\varphi - \psi) - 4ca \leqslant 0$$

$$\rho^2\cos^2(\varphi - \psi) \leqslant ca$$

Z dowolności φ wynika, że $\cos^2(\varphi - \psi)$ może przyjmować dowolną wartość z odcinka $[0, 1]$, nierówność musi więc być spełniona dla największej z nich $\cos^2(\varphi - \psi) = 1$, czyli

$$|b|^2 = \rho^2 \leqslant ca.$$

Sprawdźmy jeszcze, czy możemy dopuścić $c = 0$. Gdy $c = 0$ nierówność przyjmuje postać

$$a + 2\Re(\bar{b}z) \geqslant 0$$

i jest spełniona dla wszystkich z tylko jeśli także $b = 0$. Ostatecznie nasze warunki to

$$a \geqslant 0, c \geqslant 0 \text{ i } |b|^2 \leqslant ac.$$

Rozwiązanie 3. Miejsca zerowe mianownika to 1, 1, 3, i, $-i$. Łatwiej nam będzie na razie użyć liczb zespolonych. Ułamki proste nad $\mathbb{C}$

$$\frac{6x^4 - 17x^3 + 13x^2 - 9x + 3}{(x^2+1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-3)} + \frac{D}{(x-i)} + \frac{E}{(x+i)} =$$

Po doprowadzeniu do wspólnego mianownika mamy

$$= \frac{A(x-3)(x^2+1) + B(x-1)(x-3)(x^2+1) + C(x-1)^2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)}$$
$$+ \frac{D(x-1)^2(x-3)(x+1) + E(x-1)^2(x-3)(x-i)}{(x^2+1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)}.$$

Wielomiany stopnia 4 są równe jeśli ich wartości są jednakowe w przynajmniej pięciu różnych punktach. Porównujemy liczniki ułamków w punktach 1, 3, i, $-i$, 0:

$$\begin{array}{lll}
x = 1 & -4A = -4 & A = 1 \\
x = 3 & 40C = 120 & C = 3 \\
x = i & (-3+i)D = (-1+2i) & D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\
x = -i & \dots & E = \bar{D} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\
x = 0 & \dots & B = 2
\end{array}$$

Podstawiamy

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-3)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{(x-i)} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{(x+i)} =$$

i dodajemy dwa ostanie ułamki:

$$= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-3)} + \frac{1}{(x^2+1)}.$$

Rozwiązanie 4. Skoro P jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, to z całą pewnością jego pierwiastkiem prócz liczby $z_0 = a + bi$ jest liczba $\bar{z}_0 = a - bi$. Podstawmy teraz z_0 do wzoru na P i sprawdźmy czego się można dowiedzieć o współczynnikach:

$$P(a+ib) = a^4+4a^3bi-6a^2b^2-4ab^3i+b^4+p(a+bi)+q = (a^4+b^4-6a^2b^2+pa+q)+i(4a^3b-4ab^3+pb) = 0$$

Liczba zespolona jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy część rzeczywista i urojona są równe zero. Mamy więc dwa równania:

$$a^4 + b^4 - 6a^2b^2 + pa + q = 0 \qquad 4a^3b - 4ab^3 + pb = 0$$

Z drugiego z nich wynika (przy $b \neq 0$), że

$$p = 4a(b^2 - a^2)$$

i wtedy z pierwszego mamy

$$q = 3a^4 + 2a^2b^2 - b^4.$$

Ostatecznie

$$P(x) = x^4 + 4a(b^2 - a^2)x + 3a^4 + 2a^2b^2 - b^4.$$

Wiemy już, że pierwiastkami P są $z_0 = a + bi$ i $\bar{z}_0 = a - bi$. Wielomian P jest więc podzielny przez $(x-a-bi)(x-a+bi) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$. Oznaczmy pozostałe dwa pierwiastki przez z_1, z_2. Są one albo oba rzeczywiste, albo wzajemnie sprzężone. Ponadto $z_0 + \bar{z}_0 + z_1 + z_2 = 0$ (wzory Viette'a) czyli $z_1 + z_2 = -2a$. Wiadomo też (wzory Viette'a), że $z_1z_2z_0\bar{z}_0 = 3a^4 + 2a^2b^2 - b^4$. Skoro $z_0\bar{z}_0 = a^2+b^2$ to $z_1z_2 = 3a^2-b^2$. Okazuje się więc, że z_1, z_2 spełniają równanie kwadratowe

$$x^2 + 2ax + 3a^2 - b^2 = 0,$$

zatem

$$z_1 = -a + \sqrt{b^2 - 2a^2}, \quad z_2 = -a - \sqrt{b^2 - 2a^2}.$$

Jeśli $b^2 - 2a^2 < 0$ to rozwiązania są zespolone.

Rozwiązanie 5. Sprawdzamy, czy wektory v_1, v_2, v_3 rozpinają przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^3$. W tym celu zastępujemy układ wektorów (v_1, v_2, v_3) przez układ równoważny, tzn rozpinający tę samą przestrzeń. Dane wektory zapisujemy w macierzy (jako jej kolumny):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{\text{-1}} \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyróżnionej jedynki używamy do wyzerowania pozostałych elementów w drugim wierszu, tzn. (1) zastępujemy przez (1) + (3), a wektor (2) zastępujemy przez (2) + 2 · (3). Następnie wektor (1) zastępujemy różnicą (1) − (2):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{\text{-1}} \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \boxed{1} & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Wyróżnionej jedynki używamy teraz do wyzerowania pozostałych wyrazów trzeciego wiersza zastępując (2) przez (2) + 3 · (1) i (3) przez (3) − (1). Dalej jedynki w pierwszym wierszu używamy do wyzerowania pozostałych wyrazów w pierwszym wierszu:

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \boxed{1} & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Po tych wszystkich operacjach otrzymaliśmy niemal bazę kanoniczną w $\mathbb{R}^3$, znaczy to, że (v_1, v_2, v_3) rozpinają $\mathbb{R}^3$. Szukamy teraz liczb rzeczywistych $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ takich, że

$$x = \alpha^1 v_1 + \alpha^2 v_2 + \alpha^3 v_3$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \alpha^1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \alpha^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \alpha^3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Do rozwiązania mamy więc układ równań:

$$\begin{aligned} 2\alpha^1 + 3\alpha^2 + \alpha^3 &= 6 \\ \alpha^1 + 2\alpha^2 - 1\alpha^3 &= 2 \\ -3\alpha^1 - 5\alpha^2 + \alpha^3 &= -7 \end{aligned}$$

Dowolnie wybraną metodą otrzymujemy rozwiązanie $\alpha^1 = 1$, $\alpha^2 = 1$, $\alpha^3 = 1$.