2. Wykład

Twierdzenie 2.1. *Niech* $f \in \mathbb{R}[\mathfrak{X}]$. *Wówczas istnieją* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $p_1, \dots, p_n, q_1 \dots, q_m \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lambda, \xi_1, \dots, \xi_n, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ *takie, że*

$$f(\mathfrak{X}) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (\mathfrak{X} - \xi_k)^{p_k} \prod_{l=1}^{m} (\mathfrak{X}^2 + \beta_l \mathfrak{X} + \gamma_l)^{q_l}$$

oraz $\beta_l^2 < 4\gamma_l$ *dla* $l = 1, \dots, m$.

Dowód tego twierdzenia wynika natychmiast z zasadniczego twierdzenia algebry, którym zajmiemy się później.

Definicja 2.2. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem. Wielomian $f \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ nazwiemy *rozkładalnym,* jesli istnieją wielomiany $g, h \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ takie, że $\deg g, \deg h > 0$ i $f = gh$. Wielomian jest *nierozkładalny,* jeśli nie jest rozkładalny.

Jest jasne, że każdy wielomian można zapisać jako iloczyn wielomianów nierozkładalnych (indukcja). Twierdzenie 2.1 mówi, że nad $\mathbb{R}$ wielomiany nierozkadalne moga być tylko stopnia 1 lub 2.

Definicja 2.3. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem.

(1) *Funkcja wymierna* nad $\mathbb{F}$ jest to klasa napisu

$$f = \frac{P}{Q},$$

gdzie $P \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$, a $Q \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}] \setminus \{0\}$ względem relacji

$$\Big(\frac{P}{Q} \sim \frac{P'}{Q'}\Big) \iff \Big(PQ' = P'Q\Big).$$

(2) *Ułamek prosty* nad $\mathbb{F}$ jest to funkcja wymierna nad $\mathbb{F}$ postaci

$$f = \frac{r}{g^k},$$

dzie $\deg r < \deg g$ i wielomian g jest nierozkładalny.

Przykładami ułamków prostych nad $\mathbb{R}$ są

$$\frac{1}{\mathfrak{X} - 1}, \quad \frac{10}{\mathfrak{X} - 10)^3}, \quad \frac{-7}{\mathfrak{X}^{11}}, \quad \frac{\mathfrak{X} + 2}{\mathfrak{X}^2 + 1},$$

ale ostatnia funkcja nie jest ułamkiem prostym nad $\mathbb{C}$.

Następne twierdzenie mówi jak wygląda rozkład dowolnej funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych nad ciałem $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.4. *Niech* f *będzie funkcją wymierną nad* $\mathbb{R}$. *Wówczas istnieją* $w, P, Q \in \mathbb{R}[\mathfrak{X}]$ *takie, że* $Q \neq 0$,

$$f = w + \frac{P}{Q}$$

i $\deg P < \deg Q$. *Ponadto, jeśli*

$$Q(\mathfrak{X}) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (\mathfrak{X} - \xi_k)^{p_k} \prod_{l=1}^{m} (\mathfrak{X}^2 + \beta_l \mathfrak{X} + \gamma_l)^{q_l}$$

jest rozkładem Q *na czynniki nierozkładalne, to istnieją rzeczywiste stałe*

$$\{A_i^j\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p_i}}, \quad \{B_r^s\}_{\substack{r=1,\dots,m \\ s=1,\dots,q_r}}, \quad \{C_r^s\}_{\substack{r=1,\dots,m \\ s=1,\dots,q_r}}$$

takie, że

$$
\begin{aligned}
\frac{P(\mathfrak{X})}{Q(\mathfrak{X})} = & \frac{A_1^1}{(\mathfrak{X}-\xi_1)^{p_1}} + \frac{A_1^2}{(\mathfrak{X}-\xi_1)^{p_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{p_1}}{(\mathfrak{X}-\xi_1)} \\
& + \frac{A_2^1}{(\mathfrak{X}-\xi_2)^{p_2}} + \frac{A_2^2}{(\mathfrak{X}-\xi_2)^{p_2-1}} + \cdots + \frac{A_2^{p_2}}{(\mathfrak{X}-\xi_2)} \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{A_n^1}{(\mathfrak{X}-\xi_n)^{p_n}} + \frac{A_n^2}{(\mathfrak{X}-\xi_n)^{p_n-1}} + \cdots + \frac{A_n^{p_n}}{(\mathfrak{X}-\xi_n)} \\
& + \frac{B_1^1\mathfrak{X}+C_1^1}{(\mathfrak{X}^2+\beta_1\mathfrak{X}+\gamma_1)^{q_1}} + \frac{B_1^2\mathfrak{X}+C_1^2}{(\mathfrak{X}^2+\beta_1\mathfrak{X}+\gamma_1)^{q_1-1}} + \cdots \frac{B_1^{q_1}\mathfrak{X}+C_1^{q_1}}{(\mathfrak{X}^2+\beta_1\mathfrak{X}+\gamma_1)} \\
& + \frac{B_2^1\mathfrak{X}+C_2^1}{(\mathfrak{X}^2+\beta_2\mathfrak{X}+\gamma_2)^{q_2}} + \frac{B_2^2\mathfrak{X}+C_2^2}{(\mathfrak{X}^2+\beta_2\mathfrak{X}+\gamma_2)^{q_2-1}} + \cdots \frac{B_2^{q_2}\mathfrak{X}+C_2^{q_2}}{(\mathfrak{X}^2+\beta_2\mathfrak{X}+\gamma_2)} \\
& \quad \vdots \\
& + \frac{B_m^1\mathfrak{X}+C_m^1}{(\mathfrak{X}^2+\beta_m\mathfrak{X}+\gamma_m)^{q_m}} + \frac{B_m^2\mathfrak{X}+C_m^2}{(\mathfrak{X}^2+\beta_m\mathfrak{X}+\gamma_m)^{q_m-1}} + \cdots \frac{B_m^{q_m}\mathfrak{X}+C_m^{q_m}}{(\mathfrak{X}^2+\beta_m\mathfrak{X}+\gamma_m)}.
\end{aligned}
$$

Przykładami rozkładów z twierdzenia 2.4 są:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}^2+4\mathfrak{X}+1}{\mathfrak{X}^3+2\mathfrak{X}^2-\mathfrak{X}-2} &= \frac{-1}{\mathfrak{X}+2} + \frac{1}{\mathfrak{X}+1} + \frac{1}{\mathfrak{X}-1}, \\
\frac{\mathfrak{X}^4+\mathfrak{X}^2+1}{\mathfrak{X}(\mathfrak{X}^2+1)^2} &= \frac{1}{\mathfrak{X}} + \frac{-\mathfrak{X}}{(\mathfrak{X}^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

2.1. **Dygresja.** Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem. Oprócz wielomianów możemy rozważać również napisy postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{X}^n.$$

Nazywamy je *formalnymi szeregami potęgowymi o współczynnikach z* $\mathbb{F}$. Zbiór formalnych szeregów potęgowych o współczynnikach z $\mathbb{F}$ oznaczamy symbolem $\mathbb{F}(\mathfrak{X})$. Formalne szeregi potęgowe możemy dodawać i mnożyć podobnie jak wielomiany: dla

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{X}^n, \qquad f = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \mathfrak{X}^n$$

mamy

$$f + g = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \mathfrak{X}^n, \qquad fg = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \mathfrak{X}^n,$$

gdzie $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ i

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}.$$

Oczywiście można uważać wielomiany za szczególne szeregi potęgowe. W szczególności można zadać pytanie o analog twierdzenia o dzieleniu wielomianów w kontekście $\mathbb{F}(\mathfrak{X})$. Mamy

Twierdzenie 2.5. *Niech $f \in \mathbb{F}(\mathfrak{X})$ i niech $g \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ będzie różny od 0. Wówczas istnieją $q \in \mathbb{F}(\mathfrak{X})$ and $r \in \mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ takie, że*

$$f = qg + r \qquad \textit{oraz} \qquad \deg r < \deg g.$$

Proponujemy czytelnikowi przemyślenie dowodu tego twierdzenia.

Ciało liczb zespolonych

Zdefiniujmy dwa odwzorowania

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni \big((a,b),(c,d)\big) \longmapsto (a,b)+(c,d) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni \big((a,b),(c,d)\big) \longmapsto (a,b)\cdot(c,d) \in \mathbb{R}^2$$

wzorami

$$\begin{aligned} (a,b)+(c+d) &= (a+c, b+d), \\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc). \end{aligned} \tag{1}$$

Stwierdzenie 2.6.
(1) *Wzory* (1) *definiują przemienne i łączne dodawanie i mnożenie na zbiorze* $\mathbb{R}^2$.
(2) *Elementem neutralnym dodawania jest* $(0,0)$.
(3) *Elementem neutralnym mnożenia jest* $(1,0)$.
(4) *Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.*

Stwierdzenie 2.7. *Niech* $(a,b) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. *Wówczas istnieje element* $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ *taki, że* $(a,b)\cdot(c,d) = (1,0)$.

Dowód. $(c,d) = \big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\big)$. □

Stwierdzenia 2.6i 2.7 mówią nam, że zbiór $\mathbb{R}^2$ z działaniami zdefiniowanymi wzorami (1) i wyróżnionymi elementami $(0,0)$ i $(1,0)$ jest ciałem.

Definicja 2.8. Zbiór $\mathbb{R}^2$ z działaniami (1) i wyróżnionymi elementami $(0,0)$ i $(1,0)$ nazywamy *ciałem liczb zespolonych.* Ciało to oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

2.2. **Definicje, oznaczenia i notacja.** Element $(1,0) \in \mathbb{C}$ oznaczamy symbolem 1, a element $(0,1) \in \mathbb{C}$ oznaczamy symbolem i. Odwzorowanie $\imath : \mathbb{R} \ni a \mapsto (a,0)$ jest zanużeniem ciała liczb rzeczywistych w ciało liczb zespolonych. Mamy

$$\imath(a+b) = \imath(a) + \imath(b), \qquad \text{oraz} \qquad \imath(ab) = \imath(a)\imath(b),$$

a także $\imath(0) = (0,0)$ i $\imath(1) = (1,0)$. Dzięki zanużeniu $\imath$ możemy uważać $\mathbb{R}$ za podzbiór (i podciało) $\mathbb{C}$. Możemy również mnożyć liczby zespolone przez liczby rzeczywiste. Będziemy stosować następującą uproszczoną notację:

$$\imath(a)(c,d) = a(c,d).$$

Od razu widzimy, że przy takiej notacji, każda liczba zespolona może być *jednoznacznie* zapisana w następujący sposób:

$$(a,b) = a1 + b\mathrm{i},$$

co zazwyczaj będziemy skracać do $a + b\mathrm{i}$. Notacja ta jest bardzo wygodna w rachunkach. Zauważmy, że

$$\mathrm{i}^2 = -1. \tag{2}$$

Teraz, pamiętając równanie (2) możemy na przykład łatwo odtworzyć regułę mnożenia liczb zespolonych:

$$\begin{aligned} (a,b)(c,d) &= (a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i}) \\ &= ac + ad\mathrm{i} + b\mathrm{i}c + bd\mathrm{i}^2 \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)\mathrm{i} = (ac-bd, ad+bc). \end{aligned}$$

W notacji tej element neutralny dodawania $(0,0) \in \mathbb{C}$ zapisujemy po prostu jako 0.

Od teraz będziemy oznaczać liczby zespolone pojedynczymi literami: $z \in \mathbb{C}$. Jak już wspomnieliśmy każdą liczbę zespoloną z możemy zapisać jako $z = a+b\mathrm{i}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczby rzeczywiste a i b nazywamy odpowiednio *częścią rzeczywistą* i *częścią urojoną* liczby z i oznaczamy symbolami

$$a = \Re z, \qquad b = \Im z.$$