6. Wykład

6.1. **Podprzestrzenie.**

Definicja 6.1. *Podprzestrzenią* w X nazywamy podzbiór $Y \subset X$ taki, że z działaniami odziedziczonymi z X zbiór Y jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$.

Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Dla podzbiorów $A, B \subset X$ definiujemy

$$A + B = \{x + y \,|\, x \in A,\ y \in B\}.$$

Dla $\alpha \in \mathbb{F}$ definiujemy

$$\alpha A = \{\alpha x \,|\, x \in A\}.$$

Stwierdzenie 6.2. *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ i niech $Y \subset X$. Wówczas Y jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ mamy*

$$\alpha Y + \beta Y \subset Y. \tag{1}$$

Dowód. Jeśli Y jest podprzestrzenią, to dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ mamy $y_1 + y_2 \in Y$. Podobnie dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{F}$ i $y \in Y$ mamy $\alpha y \in Y$. Widać stąd od razu, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ zachodzi (1).

Załóżmy teraz, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ spełniony jest warunek (1). Wybierając $\alpha = \beta = 1$ otrzymujemy

$$Y + Y \subset Y.$$

Innymi słowy dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ mamy $y_1 + y_2 \in Y$. Oznacza to, że operacja wektorów z X definiuje dodawanie w ramach zbioru Y.

Podobnie wybierając $\beta = 0$ dostajemy $\alpha Y \subset Y$. Innymi słowy dla dowolnego $y \in Y$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{F}$ mamy $\alpha y \in Y$. Tak więc mnożenie przez skalary elementów X definiuje mnożenie przez skalary elementów Y. Ponadto $0 \in Y$, bo $0 = 0 \cdot y$ dla każdego y. Tak samo dla każdego $y \in Y$ mamy $-y = (-1) \cdot y \in Y$, więc wektor przeciwny do dowolnego $y \in Y$ należy do Y. Ponieważ operacje dodawania i mnożenia przez skalary spełniają warunki z definicji przestrzeni wektorowej, warunki te są również spełnione, gdy obetniemy operacje do podzbioru Y. □

6.1.1. *Uwagi.*

(1) Każda przestrzeń wektorowa X ma dwie, tak zwane *trywialne,* podprzestrzenie, a mianowicie $X \subset X$ i $\{0\} \subset X$.

(2) Jeśli Y jest podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni X, to Y jest skończenie wymiarowa i $\dim Y \leq \dim X$. Wynika to z tego, że każda baza Y jest układem liniowo niezależnym w X, więc ma mniej wektorów niż $\dim X$. Ponadto jeśli $\dim Y = \dim X$, to $Y = X$, bo każda baza Y jest układem $\dim X$ liniowo niezależnych wektorów w X, więc na mocy stwierdzenia 5.8(1) z wykładu 5., jest także bazą X

Twierdzenie 6.3. *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ i niech $\left(Y_\imath\right)_{\imath \in \mathcal{I}}$ będzie rodziną podprzestrzeni w X. Wówczas*

$$Y = \bigcap_{\imath \in \mathcal{I}} Y_\imath$$

jest podprzestrzenią X.

Dowód. Weźmy dowolne $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i dowolne $y_1, y_2 \in Y$. Innymi słowy $y_1, y_2 \in Y_\imath$ dla wszystkich $\imath \in \mathcal{I}$. Stąd kombinacja $\alpha y_1 + \beta y_2$ należy do $Y_\imath$ dla wszystkich $\imath \in \mathcal{I}$, czyli

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y.$$

oznacza to, że $\alpha Y + \beta Y \subset Y$. □

Stwierdzenie 6.4. *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ i niech $S \subset X$. Wówczas*

(1) *istnieje najmniejsza podprzestrzeń przestrzeni X zawierająca $\mathcal{S}$.*

(2) $\operatorname{span} \mathcal{S}$ *jest najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni X zawierającą $\mathcal{S}$.*

Dowód. Ad (1). Niech $\left(Y_\imath\right)_{\imath\in\mathcal{I}}$ będzie rodziną wszystkich podprzestrzeni zawierających $\mathcal{S}$. Rodzina ta jest niepusta, gdyż X jest jedną z takich podprzestrzeni. Niech

$$Y = \bigcap_{\imath\in\mathcal{I}} Y_\imath.$$

Z twierdzenia 6.3 wiemy, że Y jest podprzestrzenią. Każda podprzestrzeń Y' zawierająca $\mathcal{S}$ musi należeć do rodziny $\left(Y_\imath\right)_{\imath\in\mathcal{I}}$, więc $Y \subset Y'$. Z drugiej strony Y zawiera $\mathcal{S}$, bo każda podprzestrzeń z $\left(Y_\imath\right)_{\imath\in\mathcal{I}}$ zawiera $\mathcal{S}$. Oznacza to, że Y jest najmniejszą podprzestrzenią X zawierającą S.

Ad (2). Jest jasne, że $\operatorname{span}\mathcal{S}$ jest podprzestrzenią ("kombinacja liniowa kombinacji liniowych jest kombinacją liniową"), i że zawiera $\mathcal{S}$. Więc $\operatorname{span}\mathcal{S}$ zawiera najmniejszą podprzestrzeń zawierającą $\mathcal{S}$. Ale jeśli jakaś podprzestrzeń Y zawiera $\mathcal{S}$, to zawiera każdą kombinację liniową elementów $\mathcal{S}$, a co za tym idzie, musi zawierać $\operatorname{span}\mathcal{S}$. Widać więc, że $\operatorname{span}\mathcal{S}$ jest najmniejszą podprzestrzenią zawierającą $\mathcal{S}$. □

6.2. **Sumy podprzestrzeni.**

Stwierdzenie 6.5. *Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem i niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$. Niech Y_1 i Y_2 będą podprzestrzeniami X. Wówczas $Y_1 + Y_2$ jest podprzestrzenią X.*

Dowód. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Mamy

$$\begin{aligned}
\alpha(Y_1+Y_2)+\beta(Y_1+Y_2) &= \left\{\alpha(y_1+y_2)+\beta(y_1'+y_2')\,\middle|\,y_1,y_1'\in Y_1,\ y_2,y_2'\in Y_2\right\}\\
&= \left\{\alpha y_1+\alpha y_2+\beta y_1'+\beta y_2'\,\middle|\,y_1,y_1'\in Y_1,\ y_2,y_2'\in Y_2\right\}\\
&= \left\{\alpha y_1+\beta y_1'+\alpha y_2+\beta y_2'\,\middle|\,y_1,y_1'\in Y_1,\ y_2,y_2'\in Y_2\right\}\\
&= \left\{(\alpha y_1+\beta y_1')+(\alpha y_2+\beta y_2')\,\middle|\,y_1,y_1'\in Y_1,\ y_2,y_2'\in Y_2\right\}\\
&\subset \left\{z_1+z_2\,\middle|\,z_1\in Y_1,\ z_2\in Y_2\right\} = Y_1+Y_2.
\end{aligned}$$

□

Definicja 6.6. Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem i niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$. Niech Y_1 i Y_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni X. Podprzestrzeń $Y_1 + Y_2$ nazywamy *sumą podprzestrzeni Y_1 i Y_2*.

Lemat 6.7. *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ i niech Y_1 i Y_2 będą podprzestrzeniami X takimi, że $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$. Niech $\mathcal{S}_1 \subset Y_1$ i $\mathcal{S}_2 \subset Y_2$ będą układami liniowo niezależnymi w Y_1 i Y_2. Wówczas $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ jest układem liniowo niezależnym w X.*

Dowód. Załóżmy, że mamy kombinację liniową

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{l=1}^{m} \beta_l y_l = 0$$

dla pewnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}_1$ i $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{S}_2$. Inaczej

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{l=1}^{m} (-\beta_l) y_l. \tag{2}$$

Lewa strona (2)należy do Y_1, natomiast prawa do Y_2. Skoro $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$, otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 = \sum_{l=1}^{m} \beta_l y_l.$$

Z liniowej niezależności $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ wynika, że

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 = \beta_1 = \cdots = \beta_m.$$

□

Twierdzenie 6.8. *Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem i niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$.Niech Y_1 i Y_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni X. Wówczas*

$$\dim(Y_1 + Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim Y_1 \cap Y_2. \tag{3}$$

Dowód. Niech $\{y_1, \ldots, y_k\}$ będzie bazą przestrzeni $Y_1 \cap Y_2$. Jest to układ liniowo niezależny w przestrzeni Y_1, więc możemy uzupełnić go do bazy

$$\{y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n\}$$

tej przestrzeni. Z drugiej strony $\{y_1, \ldots, y_k\}$ jest układem liniowo niezależnym w przestrzeni Y_2 i możemy uzupełnić go do bazy

$$\{y_1, \ldots, y_k, v_1, \ldots, v_m\}$$

tej przestrzeni. Oznaczmy $Y_2' = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$. Mamy

$$Y_1 \cap Y_2' = \{0\}.$$

Istotnie, jeśli $z \in Y_2' \cap Y_1$, to z jest kombinacją liniową wektorów $v_1, \ldots, v_m$, a z drugiej strony jest elementem $Y_1 \cap Y_2' \subset Y_1 \cap Y_2$, więc jest kombinacją liniową wektorów $y_1, \ldots, y_k$. Mamy zatem

$$z = \sum_{p=1}^{k} \alpha_p y_p = \sum_{l=1}^{m} \beta_l v_l.$$

Stąd

$$0 = z - z = \sum_{p=1}^{k} \alpha_p y_p + \sum_{l=1}^{m} (-\beta_l) v_l. \tag{4}$$

Ale wektory $\{y_1, \ldots, y_k, v_1, \ldots, v_m\}$ są liniowo niezależne, więc wszystkie współczynniki kombinacji (4) muszą być równe 0. W konsekwencji $z = 0$.

Zauważmy teraz, że układ

$$\{y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\} \tag{5}$$

jest liniowo niezależny w X. Wynika to z lematu 6.7 (przy $\mathcal{S}_1 = \{y_1, \ldots, y_k, u_1, \ldots, u_n\}$ i $\mathcal{S}_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ i Y_2' w miejsce Y_2). Ponadto każdy wektor z $Y_1 + Y_2$ jest kombinacją liniową wektorów (5), a wszystkie wektory (5) są elementami $Y_1 + Y_2$. Stąd (5) jest bazą $Y_1 + Y_2$.

Teraz wzór (3) jest kwestią prostego rachunku. □

6.3. **Sumy proste.** Przejdziemy do jakościowo nowego pojęcia. Mianowicie z pary przestrzeni wektorowych (nad tym samym ciałem) utworzymy zupełnie nową przestrzeń wektorową.

Stwierdzenie 6.9. *Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem i niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech $Z = X \times Y$. Zdefiniujmy dodawanie elementów Z wzorem*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

i mnożenie przez elementy $\mathbb{F}$:

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

dla wszystkich $x, x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ i $\alpha \in \mathbb{F}$. Wówczas Z jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$, której wektorem zerowym jest $(0, 0)$.

Definicja 6.10. Niech X i Y będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Przestrzeń wektorowa Z skonstruowaną w stwierdzeniu 6.9 nazywamy *sumą prostą* przestrzeni X i Y. Sumę prostą X i Y oznaczamy symbolem $X \oplus Y$. Elementy $X \oplus Y$ zapisujemy na trzy sposoby: jako "(x, y)", "$x + y$" lub "$x \oplus y$".

Twierdzenie 6.11. *Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ i niech Y_1 i Y_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni X. Wówczas jeśli $Y_1 + Y_2 = X$ i $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$, to X jest izomorficzna z sumą prostą Y_1 i Y_2.*

Dowód. Skoro $X = Y_1 + Y_2$, to każdy element $x \in X$ może być zapisany jako $x = y_1 + y_2$. Zapis ten jest jednoznaczny gdyż, jeśli $x = y_1' + y_2'$ i $y_k' \in Y_k$ dla $k = 1, 2$, to

$$y_1 - y_1' = y_2' - y_2. \tag{6}$$

Lewa strona (6) należy do Y_1, a prawa do Y_2, więc na mocy założenia, że $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$ widzimy, że $y_1 = y_1'$ i $y_2 = y_2'$.

Niech

$$\Phi : X \ni x \longmapsto (y_1, y_2) \in Y_1 \oplus Y_2.$$

Teraz już łatwo sprawdzamy, że Φ jest izomorfizmem. $\square$

Definicja 6.12. Niech X będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$ i niech Y_1 i Y_2 będą przestrzeniami przestrzeni X. Powiemy, że X jest *sumą prostą podprzestrzeni* Y_1 *i* Y_2, jeśli X jest izomorficzna z przestrzenią $Y_1 \oplus Y_2$.

Naciągając nieco notację piszemy $X = Y_1 \oplus Y_2$, gdy X jest sumą prostą podprzestrzeni Y_1 i Y_2.