

2. WYKŁAD

2.0.1. *Przykład.* Niech G będzie grupą. Wówczas $\text{Inn}(G)$ jest podgrupą normalną w $\text{Aut}(G)$.

Twierdzenie 2.1. *Niech G będzie grupą i niech $H \triangleleft G$. Wówczas operacja*

$$G/H \times G/H \ni (xH, yH) \longmapsto xyH \in G/H \quad (1)$$

jest dobrze zdefiniowana i daje zbiorowi G/H strukturę grupy. Odwzorowanie $q_H : G \rightarrow G/H$ jest epimorfizmem.

Dowód. Niech $xH = x'H$ i $yH = y'H$. Oznacza to, że $x^{-1}x' = s \in H$ i $y^{-1}y' = t \in H$. Mamy

$$x'y'H = xsytH = xy(y^{-1}sy)tH = xyH$$

na mocy normalności podgrupy H . Łatwo sprawdzamy, że G/H z mnożeniem (1) jest grupą. Oczywiście $q_H : G \ni x \mapsto xH \in G/H$ jest surjektywnym homomorfizmem. \square

Definicja 2.2. Niech G będzie grupą i niech $H \triangleleft G$. Grupę G/H skonstruowaną w twierdzeniu 2.1 nazywamy *grupą ilorazową*, a homomorfizm $q_H : G \rightarrow G/H$ – *kanonicznym epimorfizmem* lub *epimorfizmem ilorazowym*.

Twierdzenie 2.3.

- (1) *Niech G i H będą grupami i niech $\phi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem. Wówczas $\ker \phi$ jest podgrupą normalną grupy G .*
- (2) *Niech G będzie grupą i niech K będzie podgrupą normalną w G . Wówczas istnieje grupa H i homomorfizm $\phi : G \rightarrow H$ taki, że $K = \ker \phi$.*

Dowód. Ad (1). Dla $x \in G$ i $k \in \ker \phi$ mamy

$$\phi(xkx^{-1}) = \phi(x)\phi(k)\phi(x)^{-1} = \phi(x)e\phi(x)^{-1} = \phi(x)\phi(x)^{-1} = e.$$

Oznacza to, że $xkx^{-1} \in \ker \phi$, czyli $\ker \phi$ jest podgrupą zachowywaną przez wszystkie automorfizmy wewnętrzne.

Ad (2). Niech $H = G/K$. Łatwo przekonujemy się, że epimorfizm ilorazowy $q_K : G \rightarrow H$ spełnia $\ker q_K = K$. \square

Twierdzenie 2.4. *Niech G i H będą grupami i niech $\phi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem. Wówczas istnieje dokładnie jeden monomorfizm $\psi_\phi : G/\ker \phi \rightarrow H$ taki, że $\phi = \psi_\phi \circ q_{\ker \phi}$.*

Dowód. Oznaczmy $K = \ker \phi$. Dla $xK \in G/K$ niech $\psi_\phi(xK) = \phi(x)$. Jeśli $xK = x'K$, to $x^{-1}x' = k \in K$, więc $\phi(x') = \phi(xk) = \phi(x)\phi(k) = \phi(x)e = \phi(x)$, więc odwzorowanie ψ_ϕ jest dobrze zdefiniowane. Oczywiście jest ono homomorfizmem.

Załóżmy teraz, że $\psi_\phi(xK) = e$. Oznacza to, że $\phi(x) = e$, czyli $x \in K$ i $xK = eK$ jest elementem neutralnym grupy G/K . Tym samym wykazaliśmy, że ψ_ϕ jest monomorfizmem. \square

Wniosek 2.5. *Niech G i H będą grupami i niech $\phi : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem. Wówczas grupa $\text{im } \phi$ jest izomorficzna z $G/\ker \phi$.*

2.1. Iloczynny półproste.

Twierdzenie 2.6. *Niech H i K będą grupami i niech $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ będzie homomorfizmem. Dla $s \in K$ oznaczmy $\alpha(s)$ przez α_s . Niech $G = H \times K$ i dla $(x, p), (y, q) \in G$ niech*

$$(x, p)(y, q) = (x\alpha_p(y), pq). \quad (2)$$

Wówczas G z mnożeniem zdefiniowanym przez (2) jest grupą, której elementem neutralnym jest (e_H, e_K) , a elementem odwrotnym do (x, p) jest $(\alpha_{p^{-1}}(x^{-1}), p^{-1})$.

Dowód. Fakt, że ϕ jest homomorfizmem oznacza, że $\alpha_p \circ \alpha_q = \alpha_{pq}$ dla wszystkich $p, q \in K$. Zatem dla $(x, p), (y, q), (z, r) \in G$ mamy

$$\begin{aligned} ((x, p)(y, q))(z, r) &= (x\alpha_p(y), pq)(z, r) \\ &= (x\alpha_p(y)\alpha_{pq}(z), (pq)r) \\ &= (x\alpha_p(y)\alpha_p(\alpha_q(z)), pqr) \\ &= (x\alpha_p(y\alpha_q(z)), p(qr)) \\ &= (x, p)(y\alpha_q(z), qr) = (x, p)((y, q)(z, r)) \end{aligned}$$

czyli działanie zdefiniowane przez (2) jest łączne. Oczywiście dla $(x, p) \in G$ mamy

$$(x, p)(e_H, e_K) = (x\alpha_p(e_H), pe_K) = (xe_H, p) = (x, p)$$

oraz

$$(e_H, e_K)(x, p) = (e_H\alpha_{e_K}(x), e_Kp) = (e_H\text{id}_H(x), p) = (e_Hx, p) = (x, p).$$

Równie łatwo sprawdzamy, że $(x, p)(\alpha_{p^{-1}}(x^{-1}), p^{-1}) = (\alpha_{p^{-1}}(x^{-1}), p^{-1})(x, p) = (e_H, e_K)$. \square

Definicja 2.7. Niech H i K będą grupami i niech $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ będzie homomorfizmem. Grupę G zdefiniowaną w twierdzeniu 2.6 nazywamy *iloczynem półprostym grupy H przez działanie grupy K* i oznaczamy symbolem $H \rtimes_{\alpha} K$. Jeśli $\alpha_p = \text{id}_H$ dla wszystkich $p \in K$, to wówczas $H \rtimes_{\alpha} K$ nazywamy *iloczynem prostym* grup H i K i oznaczamy symbolem $H \times K$.

Stwierdzenie 2.8. Niech H i K będą grupami i niech $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ będzie homomorfizmem. Wówczas

$$G_H = \{(x, e_K) \mid x \in H\} \quad \text{oraz} \quad G_K = \{(e_H, p) \mid p \in K\}$$

są podgrupami w $G = H \rtimes_{\alpha} K$. Ponadto G_K jest izomorficzna z K , a G_H jest podgrupą normalną izomorficzną z H , mamy

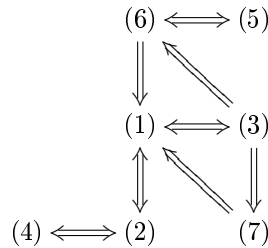
$$G_H \cap G_K = \{(e_H, e_K)\} = \{e_G\}$$

i każdy element $H \rtimes_{\alpha} K$ można zapisać jako iloczyn ab elementów $a \in G_H$, $b \in G_K$.

Twierdzenie 2.9. Niech G będzie grupą i niech H i K będą podgrupami grupy G . Załóżmy, że H jest podgrupą normalną i oznaczmy przez ι_K włożenie K w G . Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (1) każdy element grupy G można zapisać jako iloczyn ab dla pewnego $a \in H$ i $b \in K$ oraz $H \cap K = e$,
- (2) każdy element grupy G można zapisać jako iloczyn ba dla pewnego $a \in H$ i $b \in K$ oraz $H \cap K = e$,
- (3) każdy element grupy G można zapisać na dokładnie jeden sposób jako iloczyn ab dla pewnego $a \in H$ i $b \in K$,
- (4) każdy element grupy G można zapisać na dokładnie jeden sposób jako iloczyn ba dla pewnego $a \in H$ i $b \in K$,
- (5) złożenie $q_H \circ \iota_K$ jest izomorfizmem $K \rightarrow G/H$,
- (6) istnieje homomorfizm $\phi : G \rightarrow K$, taki, że $\phi \circ \iota_K = \text{id}_K$ i $\ker \phi = H$,
- (7) istnieje homomorfizm $\alpha : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ i izomorfizm $\Phi : H \rtimes_{\alpha} K \rightarrow G$ taki, że $\Phi(a, e) = a$ i $\Phi(e, b) = b$.

Dowód. Wykażemy następujące implikacje:



“(1) \Rightarrow (3)” Niech $x \in G$. Jeśli $x = ab = a'b'$ dla $a, a' \in H, b, b' \in K$. Wówczas

$$e = x^{-1}x = (ab)^{-1}a'b' = b^{-1}a^{-1}a'b' = ((b^{-1}a^{-1}b)(b^{-1}a'b))(b^{-1}b') = a_0b_0$$

gdzie $a_0 \in H$ (bo H jest normalna), $b_0 \in K$. Ale to oznacza, że $b_0 = a_0^{-1} \in H$, czyli $b_0 \in H \cap K$. Stąd, jeśli $H \cap K = \{e\}$, to $b_0 = e$, a co za tym idzie $b = b'$ i $a = a'$.

“(3) \Rightarrow (1)” Niech $y \in H \cap K$. Wówczas dla $a = y \in H, a' = e \in H$, oraz $b = e \in K, b' = y \in K$ mamy $y = ab = a'b'$. Skoro przedstawienie y w postaci iloczynu elementu H i K jest jednoznaczne, dostajemy $y = e$.

Tak samo jak równoważności (1) \Leftrightarrow (3) dowodzimy (2) \Leftrightarrow (4).

Dokończenie na następnym wykładzie. □