# 6. Wykład

## 6.1. **Reprezentacje nieprzywiedlne.**

**Twierdzenie 6.1.** *Niech $G$ będzie grupą skończoną i niech $\pi \in \mathrm{Rep}(G,X)$. Niech $Y \subset X$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą dla $\pi$. Wówczas istnieje podprzestrzeń $Z \subset X$ dopełniająca dla $Y$ i niezmiennicza dla $\pi$.*

*Dowód.* Niech $Z_0$ będzie dowolną podprzestrzenią dopełniającą dla $Y$ i niech $P_0$ będzie rzutem na $Y$ wzdłuż $Z_0$. Niech
$$P = \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\pi(t)^{-1}P_0\pi(t).$$
Wówczas
(1) $P$ jest rzutem,
(2) $P\pi(t) = \pi(t)P$ dla wszystkich $t \in G$,
(3) $\operatorname{Ran} P = \operatorname{Ran} P_0 = Y$.

Ad (1). Ponieważ $Y = \operatorname{Ran} P_0$ jest niezmiennicza dla $\pi(r)$ dla wszystkich $r \in G$, mamy
$$P_0\pi(r)P_0 = \pi(r)P_0 \tag{1}$$
dla każdego $r \in G$. Zatem
$$\begin{aligned}
P^2 &= \tfrac{1}{|G|^2}\sum_{t\in G}\pi(t)^{-1}P_0\pi(t)\sum_{s\in G}\pi(s)^{-1}P_0\pi(s)\\
&= \tfrac{1}{|G|^2}\sum_{s,t\in G}\pi(t)^{-1}P_0\pi(ts^{-1})^{-1}P_0\pi(s)\\
&= \tfrac{1}{|G|^2}\sum_{s,t\in G}\pi(t)^{-1}\pi(t)\pi(s)^{-1}P_0\pi(s)\\
&= \tfrac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\Big(\tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\mathbb{1}_X\Big)\pi(s)^{-1}P_0\pi(s) = P.
\end{aligned}$$

Ad (2). Dla dowolnego $s \in G$ mamy
$$\begin{aligned}
\pi(s)^{-1}P\pi(s) &= \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\pi(s^{-1}t^{-1})P_0\pi(ts)\\
&= \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\pi(ts)^{-1}P_0\pi(ts)\\
&= \tfrac{1}{|G|}\sum_{r\in G}\pi(r)^{-1}P_0\pi(r) = P.
\end{aligned}$$

Ad (3). Mamy na mocy (1)
$$P_0P = \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}P_0\pi(t)^{-1}P_0\pi(t) = \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\pi(t)^{-1}P_0\pi(t) = P,$$
a więc $\operatorname{Ran} P \subset \operatorname{Ran} P_0$.

Podobnie
$$PP_0 = \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\pi(t)^{-1}P_0\pi(t)P_0 = \tfrac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\pi(t)^{-1}\pi(t)P_0 = \mathbb{1}_XP_0 = P_0,$$
co daje $\operatorname{Ran} P_0 \subset \operatorname{Ran} P$.

Teraz kładziemy $Z = \ker P$. Na mocy (2) podprzestrzeń $Z$ jest niezmiennicza dla $\pi$, a na mocy (3) jest ona dopełniająca dla $Y$. □

**Wniosek 6.2.** *Neich $G$ będzie grupą skończoną i niech $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$. Niech $\rho$ będzie podreprezentacją $\pi$. Wówczas istnieje podrepresentacja $\sigma$ reprezentacji $\pi$ taka, że $\pi \sim \rho \oplus \sigma$.*

6.1.1. *Uwaga o notacji.* W sytuacji z wniosku 6.2 piszemy $\pi = \rho \oplus \sigma$ i mówimy, że $\pi$ *jest sumą prostą* podreprezentacji $\rho$ i $\sigma$. Jest to notacja i terminologia powszechna, stosowana także dla przypadku grup nieskończonych.

6.1.2. *Ważny przykład.* Niech $G$ będzie grupą "$ax+b$". Łatwo sprawdzamy, że odwzorowanie

$$(a,b) \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest reprezentacją $G$ na $X = \mathbb{C}^2$. Podprzestrzeń $Y \subset X$ składająca się z wektorów o zerowej drugiej współrzędnej jest niezmiennicza dla tej reprezentacji, ale nie istnieje niezmiennicza podprzestrzeń dopełniająca dla $Y$.

**Definicja 6.3.** Niech $G$ będzie grupą i niech $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$. Powiemy, że $\pi$ jest *nieprzywiedlna,* jeśli nie $\pi$ nie ma nietrywialnych podprzestrzeni niezmienniczych.

**Wniosek 6.4.** *Niech $G$ będzie grupą skończoną i niech $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ będzie skończenie wymiarowa. Wówczas $\pi$ jest sumą prostą podreprezentacji nieprzywiedlnych.*

6.1.3. *Uwaga.* Można też rozważać nieskończone sumy proste reprezentacji. Wówczas prawdziwe jest stwierdzenie, że każda reprezentacja grupy skończonej jest sumą prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

**Stwierdzenie 6.5.** *Niech $G$ będzie grupą skończoną i niech $\pi \in \mathrm{Rep}(G,X)$ będzie reprezentacją nieprzywiedlną. Wówczas* $\dim \pi < \infty$.

*Dowód.* Niech $x \in X \setminus \{0\}$ i niech $Y = \mathrm{span}\{\pi(t)x \mid t \in G\}$. Wówczas $Y$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $G$. Ponieważ, $\pi$ jest nieprzywiedlna, mamy $Y = X$ lub $Y = \{0\}$. Ale $0 \neq x \in Y$, więc $Y = X$. Mamy zatem $\dim X = \dim Y \leq |G|$. □

## 6.2. **Reprezentacje unitarne, unitaryzowalność.**

**Definicja 6.6.** Niech $G$ będzie grupą i niech $\pi \in \mathrm{Rep}(G,X)$, gdzie $X$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym. Powiemy, że $\pi$ jest *unitarna,* jeśli $\pi(t)$ jest operatorem unitarnym dla każdego $t \in G$.

Niech $G$ będzie grupą i niech $X$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią z iloczynem skalarnym. Jeśli $\pi \in \mathrm{Rep}(X,G)$ jest unitarna i $\mathcal{B}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $X$, to zapisując dla każdego $t \in G$

$$\big[\pi(t)\big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1}(t) & \cdots & \pi_{1,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{n,1}(t) & \cdots & \pi_{n,n}(t) \end{bmatrix}$$

mamy dla wszystkich $1 \leq k,l \leq n$ i $t \in G$

- $\pi_{k,l}(t^{-1}) = \overline{\pi_{l,k}(t)}$,
- $\sum\limits_{p=1}^{n} \overline{\pi_{p,k}(t)}\pi_{p,l}(t) = \delta_{k,l}\mathbb{1}_X = \sum\limits_{p=1}^{n} \pi_{k,p}(t)\overline{\pi_{l,p}(t)}$.

**Definicja 6.7.** Niech $G$ będzie grupą.

(1) Reprezentacja $\pi\,\mathrm{Rep}(G)$ nazywamy *unitaryzowalną,* jeśli $\pi$ jest równoważna reprezentacji unitarnej.
(2) Niech $X$ i $Y$ będą przestrzeniami z iloczynem skalarnym. Dwie reprezentacje $\pi \in \mathrm{Rep}(G,X)$ i $\rho \in \mathrm{Rep}(G,Y)$ są *unitarnie równoważne,* jeśli istnieje unitarny operator $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ taki, że $U\pi(t) = \rho(t)U$ dla wszystkich $t \in G$.

6.2.1. *Uwaga.* Zwróćmy uwagę na to, że reprezentacja z przykładu 6.1.2 nie jest unitaryzowalna.

**Twierdzenie 6.8.** *Niech $G$ będzie grupą skończoną i niech $X$ będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)_0$ i niech $\pi \in \mathrm{Rep}(G,X)$. Wówczas istnieje na $X$ nowy iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$ na $X$ taki, że dla każdego $t \in G$ odwzorowanie $\pi(t) \in \mathcal{L}(X)$ jest unitarne względem $(\cdot|\cdot)$.*

*Dowód.* Niech

$$(x|y) = \tfrac{1}{|G|}\sum_{s\in G} \big(\pi(s)x|\pi(s)y\big)_0 .$$

Łatwo sprawdzamy, że dla każdego $t \in G$ i każdego $x,y \in X$ mamy

$$\big(\pi(t)x|\pi(t)y\big) = (x|y)\,,$$

a więc przekształcenie $\pi(t)$ jest izometrią. Jest ono również odwracalne, więc $\pi(t)$ jest unitarne dla każdego $t \in G$. $\square$

**Wniosek 6.9.** *Każda reprezentacja grupy skończonej na przestrzeni posiadającej iloczyn skalarny jest unitaryzowalna.*

6.2.2. *Uwaga.* Każda przestrzeń skończenie wymiarowa ma iloczyn skalarny, więc każda skończenie wymiarowa reprezentacja grupy skończonej jest unitaryzowalna. W szczególności każda nieprzywiedlna reprezentacja grupy skończonej jest nieprzywedlna.