① Pokazać, że operator $\mathcal{P}_{\{B \atop F\}}$ jest operatorem rzutowym.

$$\mathcal{P}^2_{\{B \atop F\}} \psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \frac{1}{N!}\frac{1}{N!}\sum_P \sum_{P'} (\zeta)^{P'} (\zeta)^P \psi(\vec{r}_{P'P1}, \ldots \vec{r}_{P'PN}) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \zeta^{P'}\zeta^P = \zeta^{P'P} & , Q = P'P \leftarrow \text{złożenie permutacji} \\ \sum_P \sum_{P'} \rightarrow \sum_P \sum_Q & \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_P \left(\frac{1}{N!} \sum_Q \zeta^Q \psi(\vec{r}_{Q1}, \ldots \vec{r}_{QN}) \right) = \mathcal{P}_{\{B \atop F\}} \psi(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N) \frac{1}{N!} \overbrace{\sum_P 1}^{N!} =$$

$$= \mathcal{P}_{\{B \atop F\}} \psi(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N)$$

② Rozpatrujemy układ dwóch spinów połówkowych A i B w stanie singletowym.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku pomiaru na spinie A wielkości $S_{Az} = \frac{\hbar}{2}$, jeśli nie wykonano pomiaru na spinie B?

(b) Pomiar spinu B wykazał wartość $S_{Bz} = \frac{\hbar}{2}$. Jaki będzie wtedy wynik pomiaru S_{Az} na spinie A?
Jaki będzie wynik jeżeli zmierzymy S_{Ax} na spinie A?

(a) $\vec{S}$ - całkowity spin

Stan singletowy to taki, że $\vec{S}=0$.

$$|s\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\right)$$

$$\hat{S}_{Az} \otimes \mathbb{1}_B = \frac{\hbar}{2}\,\mathbb{P}_{A\uparrow} \otimes \mathbb{1}_B + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\mathbb{P}_{A\downarrow} \otimes \mathbb{1}_B,$$

gdzie $\mathbb{P}_{A\updownarrow} = |\updownarrow\rangle_A\langle\updownarrow|$ - operator rzutowy.

Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku pomiaru $\hat{S}_{Az} = \frac{\hbar}{2}$ wynosi

$$P_{A\uparrow} = \langle s|\,\mathbb{P}_{A\uparrow} \otimes \mathbb{1}_B\,|s\rangle = \frac{1}{2}\left[{}_A\langle\uparrow|\uparrow\rangle_A\langle\uparrow|\uparrow\rangle_A \otimes {}_B\langle\downarrow|\downarrow\rangle_B\right] =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Ad (b) • W wyniku pomiaru spinu cząstki B stan układu ulega kolapsowi, czyli

$$|s\rangle \xrightarrow[\text{kolaps}]{} |k\rangle = \underset{\uparrow}{N}\,\mathbb{P}_{B\uparrow}|s\rangle$$

stała normalizacyjna

$$\mathbb{P}_{B\uparrow}|s\rangle = |\uparrow\rangle_B\langle\uparrow|\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B$$

Ponadto $\langle k|k\rangle = \frac{1}{2}N^2 = 1 \Rightarrow N = \pm\sqrt{2}$

bez znaczenia, bo znak zmienia tylko fazę.

$$\langle k|\hat{S}_{Az}|k\rangle = \langle k|\frac{\hbar}{2}\mathbb{P}_{A\uparrow}\mathbb{1}_B - \frac{\hbar}{2}\mathbb{P}_{A\downarrow}\mathbb{1}_B|k\rangle = -\frac{\hbar}{2}$$

- $S_{Ax} = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ wartości własne : $\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$

znajdujemy wektory własne :

$$|x\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$

$$|x\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$

zatem :

$$\hat{S}_{Ax} = \frac{\hbar}{2}\mathbb{P}_{Ax\uparrow} - \frac{\hbar}{2}\mathbb{P}_{Ax\downarrow} \quad , \text{ gdzie}$$

$$\mathbb{P}_{Ax\updownarrow} = |x\updownarrow\rangle\langle x\updownarrow|$$

$$\langle k|\hat{S}_{Ax}|k\rangle = \langle k|\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_A\langle\downarrow| + \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_A\langle\uparrow|k\rangle = 0$$

③ Dwa identyczne bozony o masie m, poruszają się w jednowymiarowym potencjale harmonicznym $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Ponadto oddziałują ze sobą za pomocą potencjału :

$$V_{int}(x_1, x_2) = \alpha e^{-\beta(x_1 - x_2)^2} ,$$

gdzie β jest dodatnim parametrem. Oblicz energię stanu podstawowego w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Wyznaczenie stanu podstawowego oscylatora harmonicznego

$$|\phi_0\rangle = |a\rangle$$

$$\langle x|a|\phi_0\rangle = \left(\frac{d}{dX} + X\right)\phi_0(X) = 0$$

$$\frac{d\phi_0}{dX} = -X\Phi_0$$

$$\ln(\phi_0) = -\int X\,dX = -\frac{1}{2}X^2 + A$$

$$\Phi_0 = c_0 \exp\left(-X^2\right) = c_0 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

Normalizacja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_0(x)|^2 dx = |c_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right) = |c_0|^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = 1$$

$$c_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

$$\phi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right), \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

Bozony nie podlegają zakazowi Pauliego, dlatego mogą jednocześnie przebywać w stanie podstawowym:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V_{int}, \quad \hat{H}_0 = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2\right)$$

$$\hat{V}_{int} = \alpha e^{-\beta(x_1-x_2)^2}$$

$$E_0 = \langle \psi_0(x_1,x_2)|\hat{H}_0|\psi_0(x_1,x_2)\rangle =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega, \quad \text{gdzie } \psi_0(x_1,x_2) = \phi_0(x_1)\cdot\phi_0(x_2)$$

$$\Delta E_1 = \langle \psi_0(x_1,x_2)|\hat{V}_{int}|\psi_0(x_1,x_2)\rangle$$

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \;\; \psi_0^*(x_1,x_2)\; V_{int}(x_1,x_2)\; \psi_0(x_1,x_2) =$$

$$= \frac{\alpha_0^2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \;\exp\left[-\frac{\alpha_0^2}{\cancel{2}}(x_1^2+x_2^2) - \beta(x_1-x_2)^2\right]$$

Zamiana zmiennych:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_2 = \dfrac{x_2-x_1}{2} \end{cases} \qquad \left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} =$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = y_1+y_2 \\ x_1 = y_1-y_2 \end{cases} \qquad \cancel{= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -1-1 = -2}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{vmatrix} = +1+1 = +2$$

$$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4y_1^2 - 2y_1^2 + 2y_2^2 = 2(y_1^2+y_2^2)$$

$$(x_1-x_2)^2 = 4y_2^2$$

$$\Delta E = \frac{\alpha_0^2\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy_1 \int_{+\infty}^{+\infty} dy_2\,(+2)\,\exp\left[-2\alpha_0^2 y_1^2 - (4\beta+2\alpha_0^2)y_2^2\right] =$$

$$= +2\,\frac{\alpha_0^2\alpha}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha_0^2}}\sqrt{\frac{\pi}{4\beta+2\alpha_0^2}} = \cancel{4\,2\,\frac{\alpha_0\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2+4\beta}}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\,2\,\frac{\alpha_0^2\alpha}{\pi}\,\frac{\pi}{2\alpha_0^2}\sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2+2\beta}} = \frac{\alpha_0\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2+2\beta}}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$E = \hbar\omega + \frac{\alpha_0\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2+2\beta}}$$

④ Rozważ dwa elektrony poruszające się w potencjale centralnym w którym istnieją tylko trzy jednocząstkowe stany ψ_1, ψ_2 oraz ψ_3.

(a) Zapisz wszystkie funkcje falowe dla układu ~~dwu elektronowego~~ składającego się z dwóch elektronów.

Możliwe funkcje falowe dla fermionów są antysymetryczne ze względu na zamianę cząstek, zatem.

$$\psi_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2) - \psi_1(\vec{r}_2)\,\psi_2(\vec{r}_1)\Big), \quad \psi_{12}(\vec{r}_1\vec{r}_2) = -\psi_{12}(\vec{r}_2\vec{r}_1)$$

$$\psi_{13}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_3(\vec{r}_2) - \psi_1(\vec{r}_2)\,\psi_3(\vec{r}_1)\Big)$$

$$\psi_{23}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_2(\vec{r}_1)\,\psi_3(\vec{r}_2) - \psi_2(\vec{r}_2)\,\psi_3(\vec{r}_1)\Big)$$

(b) Jeżeli elektrony oddziałują ze sobą za pomocą potencjału: $\delta\hat{H} = V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = V'(\vec{r}_2,\vec{r}_1)$ ~~pokaż, że~~ oblicz element macierzowy $\langle\psi_{13}|\delta H|\psi_{12}\rangle$

$$\langle\psi_{13}|\delta H|\psi_{12}\rangle = \frac{1}{2}\Big[\langle\psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_3(\vec{r}_2)|\,V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,|\psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\rangle +$$

to samo $V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = V'(\vec{r}_2,\vec{r}_1)$

$$-\langle\psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_3(\vec{r}_2)|\,V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,|\psi_1(\vec{r}_2)\,\psi_2(\vec{r}_1)\rangle +$$

$$-\langle\psi_1(\vec{r}_2)\,\psi_3(\vec{r}_1)|\,V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,|\psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_2(\vec{r}_2)\rangle +$$

to samo

$$+\langle\psi_1(\vec{r}_2)\,\psi_3(\vec{r}_2)|\,V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,|\psi_1(\vec{r}_2)\,\psi_2(\vec{r}_1)\rangle\Big] =$$

$$= \langle\psi_3(\vec{r}_1)\,\psi_1(\vec{r}_2)|\,V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,|\psi_2(\vec{r}_1)\,\psi_1(\vec{r}_2)\rangle - \langle\psi_1(\vec{r}_1)\,\psi_3(\vec{r}_2)|\,V'(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\,|\psi_2(\vec{r}_1)\cdot\psi_1(\vec{r}_2)\rangle$$