Podsumowanie wykładu

1 cząstka: $\mathcal{H}$, $\{|\alpha\rangle\}$ $\longrightarrow$ N cząstek: $\mathcal{H}_N = \underbrace{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\otimes\ldots\otimes\mathcal{H}}_{N\text{-razy}}$,

Baza ortogonalna

$\{|\alpha_1,\ldots\alpha_N)\}$

$\parallel$

$|\alpha_1\rangle\otimes|\alpha_2\rangle\otimes\ldots\otimes|\alpha_N\rangle$

(Anty)Symetryzacja stanów bazowych:

$$P_{\{B,F\}}|\alpha_1\ldots\alpha_N) = \frac{1}{N!}\sum_P \zeta^P |\alpha_{P1}\rangle\otimes|\alpha_{P2}\rangle\otimes\ldots\otimes|\alpha_{PN}\rangle$$

$$|\alpha_1,\ldots\alpha_N\} = \sqrt{N!}\,P_{\{B,F\}}|\alpha_1\ldots\alpha_N)$$

$$B_N \stackrel{df.}{=} P_B\mathcal{H}_N$$

$$F_N \stackrel{df.}{=} P_F\mathcal{H}_N$$

Operator kreacji:

$$a^+_\alpha|\alpha_1\ldots\alpha_N\} \stackrel{df.}{=} |\alpha\alpha_1\ldots\alpha_N\}$$

działa w odpowiedniej przestrzeni Focka:

$$B \stackrel{df.}{=} \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_N \qquad a^+_\alpha : B_N \longrightarrow B_{N+1}$$

$$F \stackrel{df.}{=} \bigoplus_{n=0}^{\infty} F_N \qquad a^+_\alpha : F_N \longrightarrow F_{N+1}$$

Operator hermitowsko sprzężony do a^+_α to operator anihilacji:

$$a_\alpha|\alpha_1\ldots\alpha_N\} = \sum_{i=1}^{N}\zeta^{i-1}\delta_{\alpha,\alpha_i}|\alpha_1\ldots\hat{\alpha}_i\ldots\alpha_N\}$$

$$a_\alpha : B_N \longrightarrow B_{N-1}$$
$$a_\alpha : F_N \longrightarrow F_{N-1}$$

Reguły komutacyjne:

$$\begin{cases} a^+_\alpha a^+_\beta - \zeta a^+_\beta a^+_\alpha = 0 \\ a_\alpha a_\beta - \zeta a_\beta a_\alpha = 0 \end{cases}$$

Ponadto:

$$a_\alpha|0\rangle = 0$$

(na najbliższym wykładzie)

① (Uzupełnienie)

Pokazać, $\frac{1}{N!}$ że $\frac{1}{N!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N} |\alpha_1\ldots\alpha_N\}\{\alpha_1\ldots\alpha_N| = \mathbb{1}$ w B_N, F_N

$$\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N} |\alpha_1\ldots\alpha_N)(\alpha_1\ldots\alpha_N| = \sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N} |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|\otimes\ldots\otimes|\alpha_N\rangle\langle\alpha_N| =$$

$$= \left(\sum_{\alpha_1}|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|\right)\otimes\left(\sum_{\alpha_2}|\alpha_2\rangle\langle\alpha_2|\right)\otimes\ldots\otimes\left(\sum_{\alpha_N}|\alpha_N\rangle\langle\alpha_N|\right) =$$

$$= \mathbb{1}_{(1)}\otimes\mathbb{1}_{(2)}\otimes\ldots\otimes\mathbb{1}_{(N)} = \mathbb{1} \quad \text{w } \mathcal{H}_N$$

$$P_{\{B,F\}} = P^{+}_{\{B,F\}}$$

$$\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N} |\alpha_1\ldots\alpha_N\}\{\alpha_1\ldots\alpha_N| = N!\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N} P_{\{B,F\}}|\alpha_1\ldots\alpha_N)(\alpha_1\ldots\alpha_N|P_{\{B,F\}} =$$

$$= N!\; P_{\{B,F\}}\,\mathbb{1}\,P_{\{B,F\}} = N!\;\mathbb{1}_{\{B,F\}} \Rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N} |\alpha_1\ldots\alpha_N\}\{\alpha_1\ldots\alpha_N| = \mathbb{1} \quad \text{w } B_N, F_N$$

W przypadku przestrzeni Focka musimy wysumować ~~po wszystkich po~~ jedynki dla wszystkich możliwych ilości cząstek:

$$\mathbb{1}_{Fock} = \underset{|0\rangle\langle 0|}{\mathbb{1}_{0\,cz.}} + \underbrace{\mathbb{1}_{1\,cz.} + \mathbb{1}_{2\,cz.} + \ldots}_{\sum_{N=1}^{\infty}\mathbb{1}_{N\,cząst.}} = |0\rangle\langle 0| + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_N}|\alpha_1\ldots\alpha_N\}\{\alpha_1\ldots\alpha_N|$$

(2) Normalizacja stanów $|\alpha_1 \dots \alpha_N\}$.

Pokazać, że $\{\alpha_1' \dots \alpha_N' | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = \zeta^P \prod_\alpha (n_\alpha!)$,

gdy $(\alpha_1' \dots \alpha_N')$ jest permutacją $(\alpha_1 \dots \alpha_N)$

oraz $\{\alpha_1' \dots \alpha_N' | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = 0$, gdy nie jest.

$$\{\alpha_1' \dots \alpha_N' | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = N!\,(\alpha_1' \dots \alpha_N' | P^2_{\{B \atop F\}} | \alpha_1 \dots \alpha_N) =$$

$$= N!\,(\alpha_1' \dots \alpha_N' | P_{\{B \atop F\}} | \alpha_1 \dots \alpha_N) =$$

$$= \frac{N!}{N!} \sum_P \zeta^P \langle \alpha_1' | \alpha_{P1} \rangle \dots \langle \alpha_N' | \alpha_{PN} \rangle$$

Ponieważ baza $\{|\alpha\rangle\}$ jest ortogonalna, więc

$$\langle \alpha_i' | \alpha_{Pi} \rangle \neq 0 \implies \alpha_i' = \alpha_{Pi} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

W przypadku fermionów ~~mamy~~ maksymalne obsadzenie danego stanu to 1 (zakaz Pauliego)

w związku z tym:

$$\{\alpha_1' \dots \alpha_N' | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = \underbrace{(-1)^P}_{\text{znak permutacji}}$$

W przypadku bozonów mogę mieć wielokrotne obsadzenie danego stanu n_i

ponieważ w tym przypadku muszę policzyć ilość wszystkich możliwych permutacji

zbioru $\{\alpha_1, \dots \alpha_N\}$ w zbiór $\{\alpha_1' \dots \alpha_N'\}$, co daje:

$$\{\alpha_1' \dots \alpha_N' | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = n_1!\, n_2! \dots n_P!$$

n_1 – ilość bozonów w stanie $\alpha = 1$

ponieważ $0! = 1$, więc możemy ogólnie napisać, że

$$\{\alpha_1' \dots \alpha_N' | \alpha_1 \dots \alpha_N\} = \zeta^P \prod_\alpha (n_\alpha!)$$

Wprowadzamy oznaczenie:

$$|\alpha_1 \dots \alpha_N\rangle \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{\prod_\alpha n_\alpha!}} |\alpha_1 \dots \alpha_N\}$$

$$a^+_\alpha |\alpha_1 \dots \alpha_N\} \equiv |\alpha \alpha_1 \dots \alpha_N\}$$

$$a^+_\alpha |\alpha_1 \dots \alpha_N\rangle = \frac{\sqrt{n_\alpha+1}}{\sqrt{(n_1!)\dots(n_\alpha!)(n_\alpha+1)\dots}} |\alpha \alpha_1 \dots \alpha_N\} =$$

$$= \sqrt{n_\alpha+1} |\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_N\rangle (\zeta)^{i-1}$$

ilość koniecznych przestawień, aby ustawić stan α w odpowiedniej kolejności.

$$a_\alpha |\alpha_1 \dots \alpha \dots \alpha_N\rangle =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{n_\alpha}}\ 1}{\sqrt{(n_1!)\dots((n_\alpha-1)!\, n_\alpha)\dots}} \sum_{i=1}^{N} \zeta^{i-1} \delta_{\alpha,\alpha_i} |\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_N\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_\alpha}} \sum_{i=1}^{N} \zeta^{i-1} \delta_{\alpha,\alpha_i} |\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_N\rangle$$

③ 3 ~~bozony~~ bezspinowe bozony znajdujące się w jednowymiarowym pudle o długości L, z ~~oraz~~ periodycznymi warunkami brzegowymi (PBC). ~~przy braku spin~~ Dana jest baza stanów $\{|\vec{k}\rangle\}$, $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$, przy czym funkcje falowe: $\langle x|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$.

Mamy trzy bozony znajdujące się w stanach: $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{2\pi}{L}$, $k_3 = k_2$.

- Wypisz $|k_1 k_2 k_3\}$, $|k_1 k_2 k_3\rangle$

$$|k_1 k_2 k_3\} = \sqrt{3!}\, P_{\{B/F\}} |k_1 k_2 k_3) =$$

$$= \frac{\sqrt{3!}}{3!} \sum_P \xi(+1)^P |k_{P1}\, k_{P2}\, k_{P3}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3!}} \Big(|k_1 k_2 k_3) + |k_1 k_3 k_2) + |k_3 k_1 k_2) + |k_3 k_2 k_1) + |k_2 k_3 k_1) + |k_2 k_1 k_3) \Big) =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{6}} \Big(|011) + |011) + |101) + |110) + |110) + |101) \Big) =$$

$|k_1 k_2 k_3) = |n_1\, n_2\, n_3)$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \Big(|011) + |110) + |101) \Big) \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{\sqrt{6}} \Big(|011) + 2|110) \Big)$$

$k_2 = k_3$

~~$\{k_1, k_2, k_3 | k_1 k_2 k_3\} = 2$~~

$$|k_1 k_2 k_3\rangle \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{\prod_\alpha (n_\alpha!)}} |k_1 k_2 k_3\} = \frac{1}{\sqrt{1!2!0!\ldots}} |k_1 k_2 k_3\}$$

$k_2 = k_3$

• Niech $|k_1' k_2' k_3'\} \neq |k_1 k_2 k_3\}$

$$|k_1' k_2' k_3'\} = \frac{1}{\sqrt{3!}}\Big(|k_1' k_2' k_3') + |k_1' k_3' k_2') + |k_3' k_1' k_2') + |k_3' k_2' k_1') + |k_2' k_3' k_1') + |k_2' k_1' k_3') \Big)$$

$$\{k_1' k_2' k_3' | k_1 k_2 k_3\} = \frac{2}{6}\Big((k_1' k_2' k_3' | 011) + (k_1' k_3' k_2' | 011) + (k_3' k_1' k_2' | 011) + (k_3' k_2' k_1' | 011) + (k_2' k_3' k_1' | 011) + (k_2' k_1' k_3' | 011) +$$

$$+ (k_1' k_2' k_3' | 110) + (k_1' k_3' k_2' | 110) + (k_3' k_1' k_2' | 110) + (k_3' k_2' k_1' | 110) + (k_2' k_3' k_1' | 110) + (k_2' k_1' k_3' | 110) +$$

$$+ (k_1' k_2' k_3' | 101) + (k_1' k_3' k_2' | 101) + (k_3' k_1' k_2' | 101) + (k_3' k_2' k_1' | 101) + (k_2' k_3' k_1' | 101) + (k_2' k_1' k_3' | 101) \Big) =$$

$$= 0$$

aby którykolwiek z wkładów był nie zerowy. wszystkie stany muszą być zgodne.

• $$\{k_1 k_2 k_3 | k_1 k_2 k_3\} = \frac{2}{3}\Big(\overset{1}{\overset{\parallel}{(011|011)}} + \overset{1}{\overset{\parallel}{(110|110)}} + \underset{1}{\underset{\parallel}{(101|101)}} \Big) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

$$\langle k_1 k_2 k_2 | k_1 k_2 k_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \{ k_1 k_2 k_2 | k_1 k_2 k_2 \} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$\cancel{k_2 \neq k_3}$

$$a_{k_1} | k_1 k_2 k_2 \} = | k_2 k_3 \}$$

$k_2 = k_3$

$$a_{k_2} | k_1 k_2 k_2 \} = | k_1 k_3 \} + | k_1 k_2 \} = 2 | k_1 k_2 \}$$

- $$a^+_{k_1} a_{k_1} | k_1 k_2 k_3 \rangle = a^+_{k_1} a_{k_1} \frac{1}{\sqrt{1!\,2!\,0!\dots}} | k_1 k_2 k_3 \} =$$

$$= \cancel{1}\, a^+_{k_1} \cancel{1} \frac{1}{\sqrt{2}} | k_2 k_3 \} = \frac{1}{\sqrt{2}} | k_1 k_2 k_3 \} =$$

$$= 1 | k_1 k_2 k_2 \rangle$$

$k_2 = k_3$

- $$a^+_{k_2} a_{k_2} | k_1 k_2 k_2 \rangle = a^+_{k_2} a_{k_2} \frac{1}{\sqrt{1!\,2!\,0!\dots}} | k_1 k_2 k_2 \} =$$

$$= a^+_{k_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| k_1 k_2 \} + | k_1 k_2 \} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2 \, | k_1 k_2 k_2 \} = 2 | k_1 k_2 k_2 \rangle$$

~~(4) 3 elektrony ortspinie~~

(4) Unormuj stan fermionowy: $|\psi\rangle = C \left(a^+_1 a^+_2 - a^+_1 a^+_2 a^+_3 a^+_4 \right) |0\rangle$

$$\langle \psi | \psi \rangle = |C|^2 \langle 0 | \left(a_1 a_2 - a_4 a_3 a_2 a_1 \right) \left(a^+_1 a^+_2 - a^+_1 a^+_2 a^+_3 a^+_4 \right) | 0 \rangle =$$

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = |c|^2\Big(\langle 0|\, a_2 a_1\, a_1^+ a_2^+\,|0\rangle + \langle 0|$$

$$+ \langle 0|\, a_4 a_3 a_2 a_1 a_1^+ a_2^+ a_3^+ a_4^+ |0\rangle\Big)$$

$$\langle 0|\, a_2 a_1\, a_1^+ a_2^+ |0\rangle = (-)^2 \langle 0|\, a_2 a_2^+\; a_1 a_1^+ |0\rangle =$$

$$= \langle 0|\, \cancel{a_2^+ a_2} (1 - a_2^+ a_2)(1 - a_1^+ a_1)|0\rangle = 1$$

$$a a^+ + a^+ a = 1$$

$$\langle 0|\, a_4 a_3\, a_2 a_1\, a_1^+ a_2^+ a_3^+ a_4^+ |0\rangle =$$

$$= \langle 0|\, a_4 a_4^+\; a_3 a_3^+\; a_2 a_2^+\; a_1 a_1^+ |0\rangle\, (-)^6 (-)^4 (-)^2 =$$

$$= \langle 0|(1 - a_4^+ a_4)(1 - a_3^+ a_3)(1 - a_2^+ a_2)(1 - a_1^+ a_1)|0\rangle =$$

$= 1$, czyli

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = |c|^2\, 2 = 1 \implies c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(5) 3 elektrony o spinie $\frac{1}{2}$ znajdują się w jednowymiarowym pudle o długości L z z periodycznymi warunkami brzegowymi. Rozważyć trzy elektrony w stanie $|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3\}$, przy czym elektrony znajdują się w stanach jednocząstkowych $\alpha_1 = (0, \uparrow)$, $\alpha_2 = (0, \downarrow)$ oraz $\alpha_3 = \left(\frac{2\pi}{L}, \uparrow\right)$, gdzie $\alpha_i = (k_i, \sigma_i)$. Podziałaj na $|\Psi\rangle$ następującymi operatorami

$$a^+_{\frac{2\pi}{L}\uparrow},\ a^+_{\frac{2\pi}{L}\downarrow},\ a_{0\uparrow},\ a_{0\downarrow},\ a_{\frac{2\pi}{L}\uparrow} \text{ oraz } a_{\frac{2\pi}{L}\downarrow}.$$

$$\underset{\alpha_3}{\parallel}\quad \underset{\alpha_4}{\parallel}\quad \underset{\alpha_1}{\parallel}\quad \underset{\alpha_2}{\parallel}\quad \underset{\alpha_3}{\parallel}\quad \underset{\alpha_4}{\parallel}$$

$$|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + |\alpha_3\alpha_1\alpha_2) + |\alpha_2\alpha_3\alpha_1)$$
$$- |\alpha_3\alpha_2\alpha_1) - |\alpha_1\alpha_3\alpha_2) - |\alpha_2\alpha_3\alpha_1)\Big)$$

$$a^+_{\alpha_3}|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = |\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} =$$

$$= |\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_3\}\underset{1}{\underbrace{(-1)^2}} = -|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_3\} = 0.$$

$$a^+_{\alpha_4}|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = |\alpha_4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = (-1)^3|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\} =$$
$$= -|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\}$$

$$a_{\alpha_1}|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = |\alpha_2\alpha_3\}$$

$$a_{\alpha_2}|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = -a_{\alpha_2}|\alpha_2\alpha_1\alpha_3\} = -|\alpha_1\alpha_3\}$$

$$a_{\alpha_3}|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = (-1)^2 a_{\alpha_3}|\alpha_3\alpha_1\alpha_2\} = |\alpha_1\alpha_2\}$$

$$a_{\alpha_4}|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\} = 0$$

Wprowadzamy notację liczby obsadzeń:

$$|\alpha_1\ldots\alpha_N\rangle \longrightarrow |n_1\ n_2\ n_3\ldots\rangle$$

UWAGA: Ważne jest to, że baza jest zbiorem uporządkowanym!
(szczególnie istotne dla fermionów)