

① Gaz swobodnych elektronów.  
(zaskakująco)

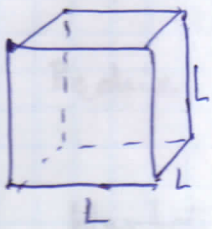
Baroko dużo możemy się dowiedzieć o własnościach elektronowych na podstawie modelu bez żadnych oddziaływań. Rozważamy model swobodnych elektronów:

$$\hat{H} = \hat{T}_{ec} = \sum_{\sigma} \int d\vec{r} \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger}(\vec{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 \right) \hat{\psi}_{\sigma}(\vec{r}) =$$

$$= \sum_{\sigma} \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} a_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} a_{\vec{k}\sigma} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \epsilon_{\vec{k}} \hat{n}_{\vec{k}\sigma}$$

Stany bazowe:  $\{ | \vec{k}, \sigma \rangle \}$ , gdzie  $\langle \vec{r}, \sigma' | \vec{k}, \sigma \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$

w bazie  $| \vec{k}, \sigma \rangle$  hamiltonian jest diagonalny.



$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n} \quad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

Nasza baza jednoznaczna jest uporządkowana tak, że:

$| \vec{k}_1, \uparrow \rangle, | \vec{k}_1, \downarrow \rangle, | \vec{k}_2, \uparrow \rangle, | \vec{k}_2, \downarrow \rangle, \dots$ , gdzie

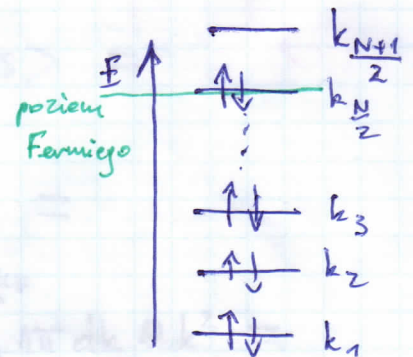
$$\epsilon_{k_1} \leq \epsilon_{k_2} \leq \epsilon_{k_3} \leq \dots \quad \left\{ \epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right\}$$

Zajmujemy się przypadkiem  $T=0$ :

Stan podstawowy:

$$|FS\rangle = a_{k_1\uparrow}^{\dagger} a_{k_1\downarrow}^{\dagger} \dots a_{k_{N/2}\uparrow}^{\dagger} a_{k_{N/2}\downarrow}^{\dagger} |0\rangle$$

↑  
mone  
Fermiego.



Najwyższa energia stanu, który jest obsadzony nazywana jest energią Fermiego ( $\epsilon_F$ ).

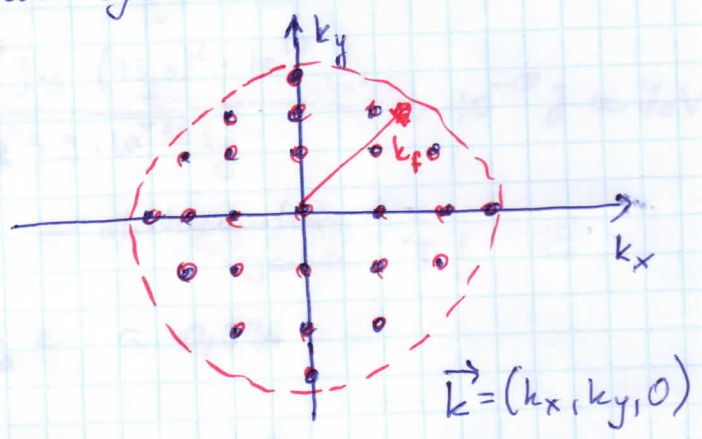
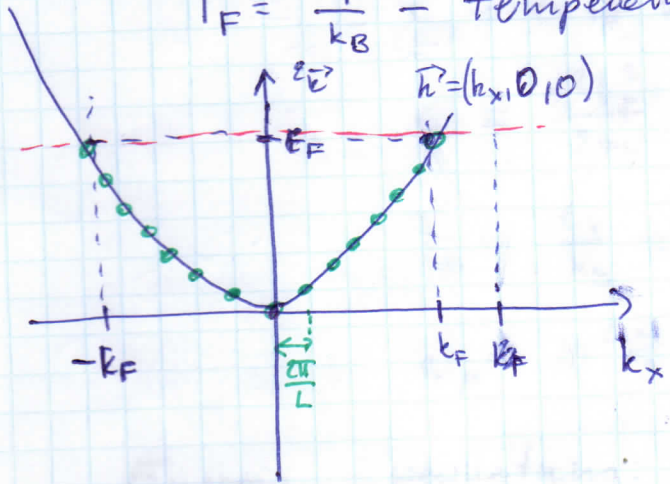
$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$  - energia Fermiego

$k_F = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\epsilon_F}$  - wektor falowy Fermiego

$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F}$  - długość fali Fermiego

$v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$  - prędkość Fermiego

$T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B}$  - temperatura Fermiego



Będzie nas interesowała sytuacja 1 górnice  $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$  (granica termodynamiczna)

Wartości oczekiwana liczby cząstek:

$$\hat{n}_{\vec{k}\sigma} |FS\rangle = \begin{cases} 1 |FS\rangle & \text{ile } |\vec{k}| \leq k_F \\ 0 & \text{ile } |\vec{k}| \geq k_F \end{cases} = \theta(k_F - |\vec{k}|)$$

$$N = \langle FS | \hat{N} | FS \rangle = \sum_{\vec{k}\sigma} \langle FS | \hat{n}_{\vec{k}\sigma} | FS \rangle =$$

$$\sum_{\sigma} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \theta(k_F - |\vec{k}|) \langle FS | FS \rangle =$$

granica termodynamiczna:  
 $(V \rightarrow \infty), N \rightarrow \infty, n = \text{const}$   
 $\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}$

degeneracja spinowa

$$= \int_0^{k_F} 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int 4\pi dk \theta(k^2) =$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^3} 2 \frac{4}{3} \pi k_F^3 = \frac{V}{3\pi^2} k_F^3$$

stad  $n = \frac{N}{V} = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \Rightarrow k_F^3 = 3\pi^2 n$   
 zależy tylko od gęstości cząstek



\* Na przykład dla miedzi:

$$n \approx 8.47 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3} \quad \left( \text{parcie przy wyhamowaniu efektu Halla} \right)$$

Dla miedzi mamy:

$$k_F \approx 13.6 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{m}} = 13.6 \text{ nm}^{-1}$$

$$\lambda_F \approx 0.46 \text{ nm}$$

$$E_F \approx \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{10^{-68} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot (13.6)^2 \cdot 10^{18} \frac{1}{\text{m}^2}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \approx 10^{-18} \text{ J} \approx 7 \text{ eV}$$

$$T_k \approx \frac{E_k}{k_B} = 10^5 \text{ K} \quad \leftarrow \text{distribucje wysokie T!}$$

$$v_F \approx 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5}{1000} c \approx 0.5\% c$$

Energia wewnętrzna:

$$E^{(0)} = \langle FS | \hat{H} | FS \rangle = \sum_{\vec{k} < k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \langle FS | \hat{H}_{k\sigma} | FS \rangle =$$

$$= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} \int d\vec{k} k^2 \theta(k_F - k) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^{k_F} dk 4\pi k^4 =$$

$$= \frac{V}{5\pi^2} \frac{\hbar^2}{2m} k_F^5 = \frac{V}{5\pi^2} \underbrace{E_F}_{\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}} \underbrace{k_F^3}_{3\pi^2 n} = \frac{3}{5} N E_F$$

$$\frac{E^{(0)}}{N} = \frac{3}{5} E_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3}$$

Przepiszmy to jeszcze raz:  $E^{(0)} = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}}$

Ciśnienie:

$$P = - \left( \frac{\partial E^{(0)}}{\partial V} \right)_N = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} \frac{2}{3} n^{5/3} \approx 10^6 \text{ atm!}$$

$\leftarrow$  Czy w takim razie gaz elektronowy jest stabilny?

klasycznie:  $p = \frac{NR T}{V} = RTn = 0$ , bo  $T=0$ .

1) Kwantowanie drgań łańcucha sztywnego tego sieć z  $N$  cząstek. Podejście wykorzystujące klasyczną teorię pola.

W  $T=0$  jony są traktowane klasycznie i nie poruszają się, tj. tworzą sieć krystaliczną:

$$R_I \equiv \bar{R}_I \approx I a = \bar{R}_I \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

$\leftarrow a \rightarrow$

Każde wychylenie od tego stanu kosztuje energię potencjalną. W  $T$  niskich temp. wychylenia powinny być małe, a wtedy drgania powinny być harmoniczne.

Hamiltonian (niskoenergetyczny) jest postaci:

$$\hat{H} = \sum_{I=1}^N \left[ \frac{P_I^2}{2M} + \frac{k_s}{2} (R_{I+1} - R_I - a)^2 \right]$$

Przyjmujemy periodyczne warunki brzegowe, tj.  $R_1 \equiv R_{N+1}$ .



Chcemy przyjąć się zbudowaniem elementarnym w teorii kwantowej.

Weźmy Lagrangian:

$$L = T - V = \sum_{I=1}^N \left[ \frac{M \dot{R}_I^2}{2} - \frac{k_s}{2} (R_{I+1} - R_I - a)^2 \right]$$

Ponadto  $R_{I+1} - R_I - a \ll a$  - małe drgania.

$$R_I(t) = \bar{R}_I + \phi_I(t) \quad \phi_{N+1} = \phi_1$$

$\uparrow$  wychylenie z położenie równowagi





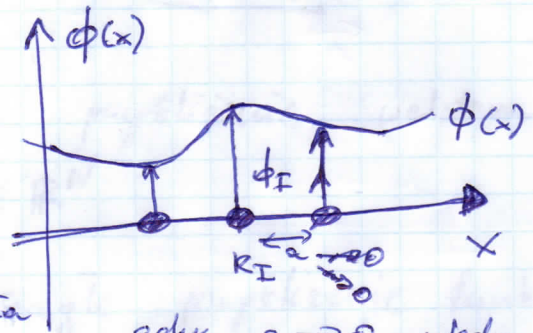
teoty:

$$L = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{M}{2} \dot{\phi}_I^2 - \frac{k_s}{2} (\phi_{I+1} - \phi_I)^2 \right]$$

Interesuje nas makroskopowe zachowanie takiego kryształu, tj.  $N \approx 10^{23} \gg 1!$ , dlatego będziemy chcieli przejść do granicy ciągłej:

$$\{\phi_I\} \longrightarrow \phi(x)$$

$$\left. \begin{aligned} [\phi_I] &= L \\ [\phi(x)] &= \sqrt{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi_I \rightarrow \sqrt{a} \phi(x) \Big|_{x=Ia}$$



gdz  $a \rightarrow 0$ , wtedy dostajemy granicę ciągłą. (fizycznie:  $a \ll$  skala zmierzności  $\phi \rightarrow$  granice nieskończoności)

$$\phi_{I+1} = \phi_I + \frac{\phi_{I+1} - \phi_I}{a} \cdot a$$

$$\phi_{I+1} - \phi_I \xrightarrow{\text{sygnalizacja zmiany}} \frac{\phi(x+a) - \phi(x)}{a} \sqrt{a} \cdot a \xrightarrow{a \rightarrow 0} (\partial_x \phi) \Big|_{x=Ia} a^{3/2}$$

$$\sum_{I=1}^N f(I) = \frac{1}{a} \sum_{I=1}^N a f(I) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_0^L dx \quad (L=Na)$$

suma Riemanna

Dostajemy funkcjonal - Lagrangian:

$$L[\phi] = \frac{1}{a} \int_0^L dx \left[ \frac{M}{2} (\dot{\phi}(x))^2 - \frac{k_s}{2} (\partial_x \phi)^2 a^3 \right] =$$

$$= \int_0^L dx \left\{ \frac{M}{2} (\dot{\phi}(x))^2 - \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \phi)^2 \right\}$$

$\mathcal{L}[\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}]$  - gęstość lagrangianu

$$[\mathcal{L}] = \frac{E}{L}$$

klasyczne dietanie:

$$S[\phi] = \int dt L[\phi] = \int dt \int_0^L dx \mathcal{L}[\phi, \dot{\phi}, \partial_x \phi]$$

Dyskretne położenia

atomów

$$I = 1 \dots N$$

→ Klasyczne pole  $\phi(x)$   
"wycylenie"

struna

$S[\phi] \in \mathbb{R}$  — funkcjonał.

Skąd się wzięło? → ciągłe przybliżenie wektora

$$\{\phi_I\} \in \mathbb{R}^N$$

→  $L[\phi] \rightarrow$  ciągłe przybliżenie funkcji

$$L: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

### Równania ruchu

Stosujemy zasadę najmniejszego dietania

$$\phi = \phi(x, t) + \varepsilon \eta(x, t)$$

$$\delta S = S[\phi + \varepsilon \eta] - S[\phi] = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$S[\phi + \varepsilon \eta] = S[\phi] + \varepsilon \int_0^L dx \int_0^t dt [\dot{m} \dot{\phi} \dot{\eta} - k_s a^2 (\partial_x \phi) (\partial_x \eta)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =$$



~~$S[\phi] + \varepsilon \int_0^L dx \int_0^t dt [\dot{m} \dot{\phi} \dot{\eta} - k_s a^2 (\partial_x \phi) (\partial_x \eta)] +$~~

cohnujemy przez  
całkowanie

$= S[\phi] + \varepsilon \int_0^L dx \left[ m \dot{\phi} \dot{\eta} \Big|_0^t - \int_0^t dt' m \dot{\phi} \dot{\eta} \right] +$

cohnujemy przez  
całkowanie

$- \varepsilon \int_0^L dx \int_0^t dt' \left[ (\partial_x \phi) \eta \Big|_0^L - \int_0^L dx (\partial_x^2 \phi) \eta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$



$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta S[\phi + \epsilon \eta] - \delta S[\phi]}{\epsilon} = - \int_0^t dt' \int_0^L dx \left[ m \dot{\phi} - k_s a^2 \partial_x^2 \phi \right] \eta = 0$$

Zatem

$$\boxed{m \partial_t^2 \phi - k_s a^2 \partial_x^2 \phi = 0}$$

równanie falowe

$\forall \eta$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi = 0$$

•  $\phi =$   
 $(\partial_t - v \partial_x) \phi = 0$   
 $(\partial_t + v \partial_x) \phi = 0$

Rozwiązanie tego równania są postaci:



$$\phi(x,t) = \phi_+(x-vt) + \phi_-(x+vt)$$

$$\partial_t^2 \phi_+(x-vt) = -v \partial_t \phi_+'(x-vt) = v^2 \phi_+''(x-vt)$$

$$\Rightarrow m v^2 = k_s a^2, \text{ czyli } v = \sqrt{\frac{k_s}{m}} a - \text{prędkość dźwięku.}$$

Fale dźwiękowe propagują się z prędkością  $v$ .

$\rightarrow$  to są nasze wzbrohenia elementarne

Ważna charakterystyka wzbrohen i energia.

Ile energii jest zgromadzone w falcach dźwiękowych rozchodzących się w kierunku?

Pady kanoniczne sprzeczne:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi})}{\partial \dot{\phi}} \leftarrow \text{pady sprzeczny z } \phi$$

Gęstość hamiltonianu:

$$\mathcal{H}[\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}] \equiv \left( \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}[\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}] \right) \Big|_{\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi, \pi)}$$

$$H = \int_0^L dx \mathcal{H}$$

↑  
transformacja Legendre'a

W naszym przypadku:

$$\pi(x) = m \dot{\phi}(x) \rightarrow \dot{\phi}(x) = \frac{1}{m} \pi(x)$$

$$\mathcal{H}[\phi, \partial_x \phi, \pi] = \frac{\pi^2}{2m} - \frac{k_s}{2} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \phi)^2$$

# Kwantowy Tętnuch harmoniczny

Kwantowa mechanika dla układów ciągłych.

Jak ogólnie skwantować nasz model dany

przez 
$$L[\phi] = \int_0^L dx \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi})$$

Kwantowanie kanoniczne:

Mamy pęd  $\pi(x)$  i pole  $\phi(x)$

Jak wygląda ich nawias Poissona?

$$\left\{ \begin{aligned} \{A, B\} &= \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\} \end{aligned} \right.$$

$$\{\phi(x), \pi(x')\} = \int dx'' \frac{\partial \phi(x'')}{\partial \phi(x'')} \frac{\partial \pi(x')}{\partial \pi(x'')}$$

Układ dyskretnych atomów  $H(\{q_i\}_{i=1}^N, \{p_i\}_{i=1}^N)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}$$

$$\{R_i, p_i\} = \delta_{ij}$$

Uogólnienie dla układów ciągłych:  $\{\phi(x), \pi(x')\} = \delta(x-x')$

Uogólniamy procedurę kwantowania na przypadku

ciągły:

$$\{[R_I, P_{I'}] = i\hbar \delta_{II'} \text{ dla ukł. dyskretnego}\}$$

$$\phi \rightarrow \hat{\phi}$$

$$\pi \rightarrow \hat{\pi}$$

↑

funkcje

o wartościach  
respektujących  
operatorowych.

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x')] = i\hbar \delta(x-x')$$



Klasyczne gęstości hamiltonianu staje się operatorem kwantowym:

$$\hat{H}[\hat{\phi}, \hat{\pi}] = \int dx \left[ \frac{\hat{\pi}^2}{2M} + \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \hat{\phi})^2 \right]$$

$$\mathcal{H}[\hat{\phi}, \hat{\pi}]$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}[\hat{\phi}, \hat{\pi}] = \frac{1}{2M} \hat{\pi}^2 + \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \hat{\phi})^2$$

Możemy wykorzystać transformację Fouriera:

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx e^{-ikx} \hat{\phi}(x)$$

$$\hat{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ikx} \hat{\phi}_k$$

$$\hat{\pi}_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx e^{ikx} \hat{\pi}(x)$$

$$\hat{\pi}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{-ikx} \hat{\pi}_k$$

gdzie  $k = \frac{2\pi n}{L}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

← hermitowskie pola kwantowe.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\phi}_k &= \hat{\phi}_{-k}^+ \\ \hat{\pi}_k &= \hat{\pi}_{-k}^+ \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{bo } \left. \begin{aligned} \phi(x) \\ \pi(x) \end{aligned} \right\} \text{ - rzeczywiste pole klasyczne}$$

Ile wynosi  $[\hat{\phi}_k, \hat{\pi}_{k'}]$ ?

$$[\hat{\phi}_k, \hat{\pi}_{k'}] = \frac{1}{L} \int dx_1 \int dx_2 e^{-ikx_1} e^{ik'x_2} \underbrace{[\hat{\phi}(x_1), \hat{\pi}(x_2)]}_{i\hbar \delta(x_1 - x_2)} =$$

$$= \frac{i\hbar}{L} \underbrace{\int dx_1 e^{i(k' - k)x_1}}_{L \delta_{kk'}} = i\hbar \delta_{kk'}$$

, czyli

$$[\hat{\phi}_k, \hat{\pi}_{k'}] = i\hbar \delta_{kk'}$$

zapisać my hamiltonian  $\hat{H} = \int dx \mathcal{H}[\hat{\phi}, \hat{\pi}]$  w rep. Fouriera:

$$\begin{aligned} \bullet \int dx (\partial_x \hat{\phi})^2 &= \int dx \left( \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k_1} e^{ik_1 x} \hat{\phi}_{k_1}(ik_1) \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k_2} e^{ik_2 x} \hat{\phi}_{k_2}(ik_2) \right) = \\ &= \sum_{k_1 k_2} (-k_1 k_2) \hat{\phi}_{k_1} \hat{\phi}_{k_2} \underbrace{\int dx \frac{1}{L} e^{i(k_1+k_2)x}}_{\delta_{k_1, -k_2}} = \sum_k k^2 \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int dx \hat{\pi}^2(x) &= \int dx \left( \sum_{k_1} e^{-ik_1 x} \frac{1}{\sqrt{L}} \hat{\pi}_{k_1} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k_2} e^{-ik_2 x} \hat{\pi}_{k_2} \right) = \\ &= \sum_k \hat{\pi}_k \hat{\pi}_{-k} \end{aligned}$$

$$\hat{H} = \sum_k \left[ \frac{1}{2m} \hat{\pi}_k \hat{\pi}_{-k} + \underbrace{\frac{\kappa_s a^2}{2} k^2}_{\frac{m\omega_k^2}{2}} \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{-k} \right] =$$

bo  $v = a \sqrt{\frac{\kappa_s}{m}}$   
 $\omega_k = v|k|$

$$= \sum_k \left[ \frac{1}{2m} \hat{\pi}_k \hat{\pi}_{-k} + \frac{m\omega_k^2}{2} \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{-k} \right]$$

wyrażenie to przypomina sumę oscylatorów harmonicznych.

Przez analogię do jednowymiarowego oscylatora harmonicznego wprowadzimy operatory:

$$\hat{a}_k = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left( \hat{\phi}_k + \frac{i}{m\omega_k} \hat{\pi}_{-k} \right)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left( \hat{\phi}_{-k} - \frac{i}{m\omega_k} \hat{\pi}_k \right)$$



$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] &= \sqrt{\dots} \sqrt{\dots} \left( [\hat{\phi}_k, \hat{\phi}_{k'}] + \frac{i}{m\omega_{k'}} [\hat{\phi}_{+k}, \hat{\pi}_{-k'}] + \right. \\
 &+ \frac{i}{m\omega_k} [\hat{\pi}_{-k}, \hat{\phi}_{k'}] + \left. - \frac{1}{m^2\omega_k\omega_{k'}} [\hat{\pi}_{-k}, \hat{\pi}_{-k'}] \right) = \\
 &= \left( \frac{i}{m\omega_k} \delta_{k,-k'} - \frac{i}{m\omega_k} \delta_{-k,k'} \right) \sqrt{\dots} \sqrt{\dots} = 0 \quad \forall k, k'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] &= \frac{m}{2\hbar} \sqrt{\omega_k\omega_{k'}} \left( - \frac{i}{m\omega_{k'}} [\hat{\phi}_k, \hat{\pi}_{k'}^+] + \frac{i}{m\omega_k} [\hat{\pi}_{-k}, \hat{\phi}_{-k'}^+] \right) = \\
 &= \delta_{kk'}
 \end{aligned}$$

Lapisu jenny hamiltonian py pomocy operatow  
krecy i anihilacyi:

$$\{\omega_k = \omega_{-k}\}$$

$$\hat{\phi}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_k}} (\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^+)$$

$$\hat{\pi}_k = \frac{i m \omega_k}{\sqrt{2m\omega_k}} \sqrt{\hbar} (\hat{a}_k^+ - \hat{a}_{-k})$$

$$\bullet \sum_k \frac{1}{2m} \hat{\pi}_k \hat{\pi}_{-k} = \sum_k \frac{1}{2m} \frac{-m^2 \omega_k^2 \hbar}{2m\omega_k} (a_k^+ - a_{-k}) (\hat{a}_{-k} - a_k) =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_k \hbar \omega_k [a_k^+ a_{-k}^+ - a_k^+ a_k - a_{-k} a_k^+ + a_{-k} a_k]$$

$$\bullet \sum_k \frac{m\omega_k^2}{2} \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{-k} = \sum_k \frac{\hbar \omega_k^2}{2} \frac{\hbar}{2m\omega_k} [a_k^+ + a_k^+] [a_{-k} + a_k^+] =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_k \hbar \omega_k [a_k a_{-k} + a_k a_{-k}^+ + a_{-k}^+ a_k + a_{-k}^+ a_k^+]$$

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k [a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger] = \sum_k \hbar \omega_k [a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}]$$

hamiltonian  
fononowy.  
w reprezentacji  
II kwantyzacji

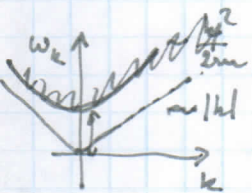
suma oscylatorów  
z charakterystycznymi  
częstotliwościami  $\omega_k$   
wzrastającymi  $\omega \rightarrow 0$   
 $\omega_k \rightarrow 0$

stan wzbucony  $\rightarrow$  zbiór  $\{n_k\} = (n_1, n_2, \dots)$

wzbuśnięcie kolektywne  
wielu różnych  
atomów sieci

liczba  $\uparrow$   
kwadratów

fizycznie  $\rightarrow$  mody fononowe  $\rightarrow$  kwadraty o energii  $\omega_k$   
(efektywne zachowanie  
sieci krystalicznej)



gdy  $k \rightarrow 0$  wtedy  $\omega_k \rightarrow 0$  są to  
tak zwane wzbuśnienia bezmasowe.

$$\omega_k \sim |k|$$

$\leftarrow$  wzbuśnienie o liniowej relacji dyspersyjnej (infinitymalnie mały wkład energetyczny wzbuśnienie pozwala wzbuśnić te mody)

w ogólności fonony dla krystaliku 3D (jak dla fononu)  
mogą mieć 3 różne polaryzacje

(fonony mają 2), wtedy

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_{k\alpha} \left( a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} + \frac{1}{2} \right)$$

$\uparrow$   
polaryzacja.

Fonony mogą oddziaływać z elektronami,  
co pozwala zrozumieć takie zjawiska jak

termiczne rozpraszanie elektronów (opór elektryczny)

oraz występowanie zjawiska nadprzewodnictwa  
(zerowy opór) - efektywne przyciąganie oddziaływanie  
między elektronami.