ECHANIKA KWANTOWA II B – ĆWICZENIA 8 21.11.2017

Kwantowanie pola elektromagnetycznego

Wyrażenie na potencjał wektorowy:

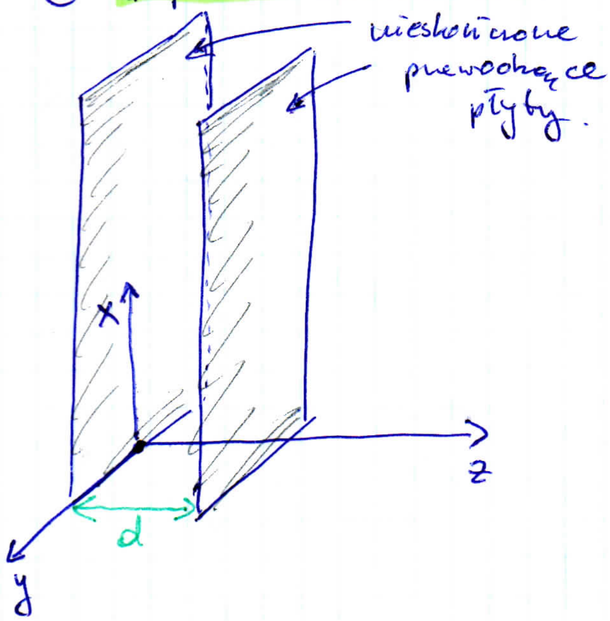
$$\hat{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}\lambda} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} + a^{+}_{\vec{k}\lambda} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)} \right] \vec{\varepsilon}_{\lambda}$$

wektor polaryzacji

Hamiltonian dla fotonów:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}\lambda} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(a^{+}_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

1) Efekt Casimira



Klasycznie:

Nakładamy ~~warunki brz~~ periodyczne warunki brzegowe na kierunek x i y. Ponadto chcemy, aby składowa styczna pola elektrycznego i normalna pola magnetycznego znikały na powierzchni przewodzących płyt.

Ponieważ potencjał wektorowy o $k_z \neq 0$:

$$\vec{A} = \vec{\varepsilon}\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z)\, e^{i\omega_k t},$$

gdzie $k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x$, $k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y$, $k_z = n_z \frac{\pi}{d}$,

gdzie $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$, $n_z \in \mathbb{Z}_{+}$

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\vec{\varepsilon}$ – wektor polaryzacji

...ponieważ $\varphi = const$ oraz $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, więc

$$\vec{E} = i\omega_{\vec{k}} \vec{\varepsilon}\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z)\, e^{-i\omega_k t}$$

natomiast korzystając z $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ dostajemy, że

$$\vec{B} = \vec{k} \times \vec{\varepsilon}\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} \cos(k_z z)\, e^{-i\omega_k t}$$

Znikanie składowej stycznej pola elektrycznego jest zapewnione przez $\sin(k_z z)$ w wyrażeniu na $\vec{E}$, natomiast znikanie składowej normalnej pola magnetycznego wymaga, aby:

$$\vec{e}_z \cdot (\vec{k} \times \vec{\varepsilon}) = 0 \,, \quad \text{czyli} \quad \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$$

Korzystając z prawa Gaussa dostajemy ponadto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} k_x \varepsilon_y - k_y \varepsilon_x = 0 \\ k_x \varepsilon_x + k_y \varepsilon_y + k_z \varepsilon_z = 0 \end{array} \quad \forall \vec{k} \text{ z } k_z \neq 0$$

<u>Kwantowo</u>: gęstość energii we wnętrzu wnęki

Hamiltonian: $\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}\lambda} \left(a^+_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right)$

~~polaryzacja w naszym przypadku jest bez znaczenia.~~
O polaryzacji sprecyzujemy rozważanie potem.
Stan próżni elektromagnetycznej definiujemy jako:

$$a_{\vec{k}\lambda} |0\rangle = 0 \,,$$

ponieważ $[a_{\vec{k}\lambda}, a^+_{\vec{k}\lambda}] = \delta_{\vec{k}\lambda\vec{k}'\lambda'}$, ~~mo~~ więc możemy rozłożyć stan próżni jako:

$$|0\rangle = |0_{\vec{k}_1\lambda}\rangle \otimes |0_{\vec{k}_2\lambda}\rangle \otimes \ldots$$

W związku z tym energia oczekiwana próżni dana jest wyrażeniem:

$$\langle E\rangle = \langle 0|\hat{H}|0\rangle = \langle 0|\sum_{\vec{k}}\left(\hbar\omega_{\vec{k}}\, a^{+}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{\vec{k}}\right)|0\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \quad \leftarrow \text{energia próżni}$$

Zauważmy, że energia próżni jest nieskończona!

Wypiszmy wyrażenie na energię wnęki dla $k_z \neq 0$:

$$E^{*}_{cav} = \frac{1}{2}\hbar c \sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z=1}^{\infty}\underbrace{\left[\left(\frac{2\pi}{L_x}n_x\right)^2+\left(\frac{2\pi}{L_y}n_y\right)^2+\left(\frac{\pi}{d}n_z\right)^2\right]^{1/2}}_{k = \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}}$$

$\uparrow$ ~~gwiazdka oznacza~~, że nie ~~uwzględniamy $k_z \neq 0$~~.

$$\omega_k = c\,k$$

Przechodząc z rozmiarami płyt do nieskończoności dostajemy:

$$\frac{E^{*}_{cav}}{L_x L_y} = \frac{1}{2}\hbar c \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{dk_x}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{dk_y}{2\pi}\left[k_x^2+k_y^2+\left(\frac{\pi}{d}n\right)^2\right]^{1/2}$$

~~Nad k_x, k_y~~, ~~wtedy~~: suma od $-\infty$ do $+\infty$, aby uwzględnić polaryzację

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar c L_x L_y}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}dk_x\int_0^{\infty}dk_y\left[\frac{1}{2}\sqrt{k_x^2+k_y^2} + \sum_{n_z=1}^{\infty}\sqrt{k_x^2+k_y^2+\left(\frac{\pi}{d}n_z\right)^2}\right]$$

×2, bo suma po polaryzacjach

($k_i = 0 \Rightarrow$ tylko jedna polaryzacja)

W przypadku swobodnego pola elektromagnetycznego analogiczne wyrażenie przyjęłoby postać:

$$\frac{E_{free}}{V} = \frac{1}{2}\frac{\hbar c}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int_{-\infty}^{+\infty}dk_y\int_{-\infty}^{+\infty}dk_z\,\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$$

Oba wyrażenia są rozbieżne i jeżeli chcemy uzyskać porządny wynik musimy je zregularyzować.

rocedura regularyzacji funkcją ζ Riemanna:

Regularyzacja $\equiv$ procedura usuwania osobliwości z obserwabli (głównie w QFT)

Energia pola elektromagnetycznego pomiędzy płytkami:

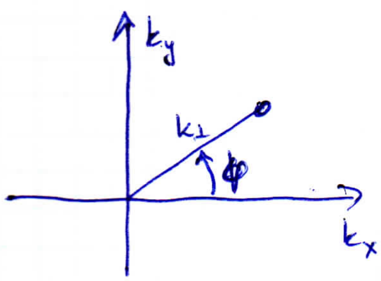
$$\langle E\rangle = \frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int_{-\infty}^{+\infty}dk_y\,\frac{L_xL_y}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega_{kn}$$

suma po dwóch możliwych polaryzacjach została uwzględniona poprzez rozciągnięcie sumy od $]-\infty, +\infty[$, przy czym $n=0$ ~~od~~ wchodzi do sumy tylko raz tak jak być powinno!

Jedną z metod regularyzacji byłoby wprowadzenie obcięcia ze względu na ω, jednak my postąpimy inaczej: podzielimy naszą rozbieżną ~~całkę~~ wyrażenie podcałkowe przez ω^{2s}, ~~które~~ gdzie potencjalnie s może być zespolone, wtedy:

$$\langle E(s)\rangle = \frac{\hbar}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int_{-\infty}^{+\infty}dk_y\,\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega\cdot\omega^{-2s}L_xL_y$$

wprowadzamy zmienne $k_\perp=\sqrt{k_x^2+k_y^2}$ i $\varphi\in[0,2\pi[$



$$\cancel{\langle E(s)\rangle = L_xL_y\frac{\hbar c}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}dk_\perp k_\perp\left(\sqrt{k_\perp^2+\left(\frac{\pi}{d}n\right)^2}\right)^{1-2s}}$$

$$\langle E(s)\rangle = \frac{L_xL_y}{(2\pi)^2}\frac{\hbar c}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}dk_\perp k_\perp\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(k_\perp^2+\left(\frac{\pi}{d}n\right)^2\right)^{\frac{1-2s}{2}} =$$

$$= \frac{L_xL_y}{2\pi}\frac{\hbar c}{2}\int_0^{\infty}dk_\perp k_\perp\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(k_\perp^2+\left(\frac{\pi}{d}n\right)^2\right)^{\frac{1-2s}{2}}$$

~~wprowadzamy zmie~~

Wprowadzamy zmienne:

$$y = \frac{k_\perp d}{n\pi} \quad \Rightarrow \quad k_\perp = y\,\frac{n\pi}{d}$$

$$\langle E(s)\rangle = \frac{L_x L_y}{2\pi}\,\frac{\hbar c}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}\frac{n\pi}{d}\,dy\,\frac{n\pi}{d}\,y\left(\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 y^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}-s} =$$

$$= \frac{L_x L_y}{2\pi}\,\frac{\hbar c}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} dy\, y\,(y^2+1)^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\left(\frac{n\pi}{d}\right)^{1-2s} =$$

$$= \frac{L_x L_y}{2\pi}\,\frac{\hbar c}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} dy\, y\,(y^2+1)^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^{3-2s}$$

~~Mamy zatem~~: $\langle E(s)\rangle = \frac{L_x L_y}{2\pi}\,\hbar c\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} dy\,(y^2+1)^{1/2}\left(\frac{n\pi}{d}\right)^{3-2s}$

Powyższe wyrażenie jest rozbieżne dla $s \to 0$, ale jest zbieżne ~~z~~ dla $s \geq 3/2$. ~~i w związku~~ ~~wa~~ Możemy zatem wykonać to wyrażenie w domenie jego zbieżności, a następnie uzyskany wynik analitycznie przedłużyć dla $s = 0$.

Całki możemy policzyć w prosty sposób:

$$\int_0^{\infty} y(y^2+1)^{1/2-s}\,dy = \left\{\begin{matrix} u = y^2 \\ du = 2y\,dy\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(u+1)^{1/2-s}\,du =$$

$$= \left\{\begin{matrix} w = u+1 \\ du = dw\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\int_1^{\infty} w^{1/2-s}\,dw = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3/2-s}\right) w^{3/2-s}\Big|_1^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3/2-s}\right)\Big|_{s=0} = -\frac{1}{3}$$

przedłużenie analityczne

$$\cancel{\langle E(d)\rangle = -\frac{\hbar c L_x L_y}{6\cdot 2}\frac{1}{d^3}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^{2s-3}} = -\hbar c L_x L_y}$$

$$\langle E(d)\rangle = -\frac{\hbar c \pi^2 L_x L_y}{6}\frac{1}{d^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-3}} =$$

$$= -\frac{\hbar c \pi^2 L_x L_y}{6}\frac{1}{d^3}\underbrace{\zeta(2s-3)}_{\substack{\text{w} \\ \text{funkcja } \zeta \\ \text{Riemanna}}}\Big|_{s=0} = -\frac{\hbar c \pi^2 L_x L_y}{6}\frac{1}{d^3}\zeta(-3)$$

Wiemy, że $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$, więc

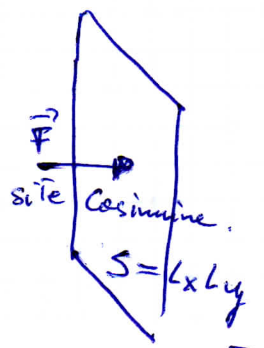
$$\frac{\langle E(d)\rangle}{V} = \frac{\langle E(d)\rangle}{L_x L_y d} = -\frac{\hbar c \pi^2}{720}\frac{1}{d^4}$$

Ciśnienie Casimira:

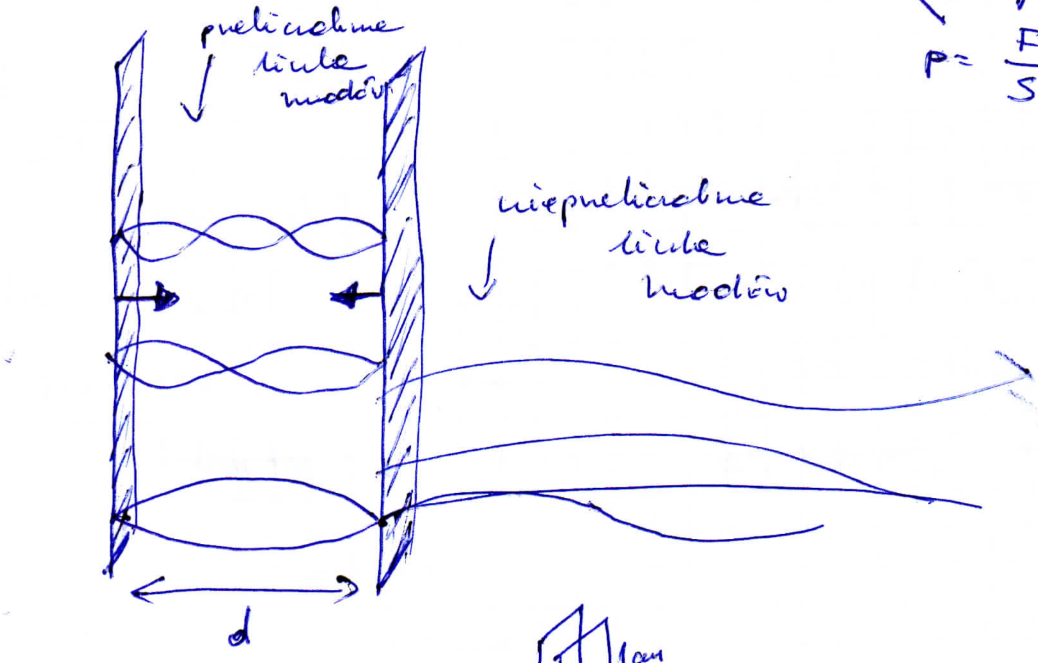
$$p = -\frac{1}{L_x L_y}\frac{\partial\langle E(d)\rangle}{\partial d} = -\frac{\hbar c}{240}\frac{\pi^2}{d^4}$$

pole powierzchni płyt

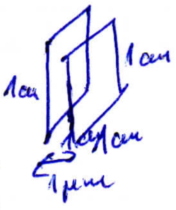
przyciągające siłę



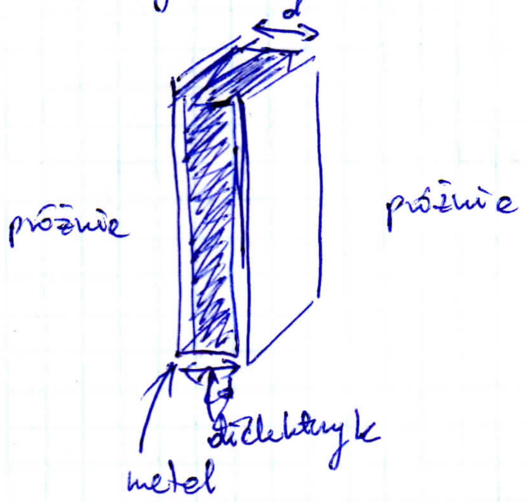
$p = \frac{F}{S}$



$F = -0{,}013$ dyny $= -0{,}013\cdot 10^{-5}$ N $= -1{,}3\cdot 10^{-7}$ N



Siły Casimira – Lifszyca



Powstające na powierzchni plazmony powodują wywieranie odpychającej siły między płytkami

$$E_0(d) = \hbar \left(\frac{L_x L_y}{(2\pi)^2}\right) \int d^2k \left[\left(\omega_+(k) - \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}\right) + \left(\omega_-(k) - \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}\right)\right],$$

gdzie $\omega_\pm(k) = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \mp e^{-kd}}$

stała dielektryczna $\longrightarrow \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \leftarrow$ częstość plazmowa

$$P(d) = -\frac{1}{L_x L_y} \frac{\partial E_0(d)}{\partial d} = 0{,}0078 \frac{\hbar \omega_p}{d^3}$$

Krytyczne siły Casimira

Do pojawienia się ~~krytycznych~~ sił ~~kasim~~ ~~Cas~~ Casimira wystarcza, że mamy fluktuujący ośrodek np. w przypadku cieczy w punkcie krytycznym również występują siły między płytkami, których znak zależy od własności i geometrii płytek są to tak zwane krytyczne siły Casimira.