1. ~~Wyko~~ Wykorzystując pojęcie ~~funkcjonału~~ funkcji generującej dla rozkładów prawdopodobieństwa dowiedź twierdzenie Wicka dla gaussowskich wartości oczekiwanych. Zastosuj je w przypadku modelu ϕ^4 oraz omów na tym przykładzie ~~zja~~ pojęcie spontanicznego łamania symetrii. Narysuj odpowiednie diagramy Feynmana konstruując stosowne ~~rozkład~~ rozwinięcie ~~grafowe~~ kumulantowe.

Rozwiązanie:

Niech $\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Omega(\vec{x})$ będzie dodatnią miarą lub znormalizowanym rozkładem prawdopodobieństwa zdefiniowanym na $\mathbb{R}^n$. Wartości oczekiwane możemy wtedy liczyć za pomocą wzoru:

$$\langle F \rangle = \int d^n x \, F(\vec{x}) \, \Omega(\vec{x}) ,$$

gdzie $d^n x = \prod_{i=1}^{n} dx_i$. Z racji normalizacji mamy także $\langle 1 \rangle = 1$.

Wprowadzamy transformację Fouriera dla tego rozkładu, która jest także funkcją generującą dla jego momentów. Rozważamy klasę rozkładów dla których transformata Fouriera jest funkcją analityczną, która może być zdefiniowana także dla zespolonych argumentów:

$$\boxed{Z(\vec{b}) = \langle e^{\vec{b}\cdot\vec{x}} \rangle = \int d^n x \, \Omega(\vec{x}) \, e^{\vec{b}\cdot\vec{x}}} , \quad \text{gdzie } \vec{b}\cdot\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i ,$$

funkcja generująca

$\vec{b} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \in \mathbb{C}^n$

…wynika z rozważenia takiej postaci funkcji generującej, zamiast transformaty Fouriera, jest to że funkcja podcałkowa ciągle jest dodatnią miarą.

Funkcję $Z(b)$ nazywamy funkcją generującą momenty rozkładu, tj. wartości oczekiwane z jednomianów. Możemy na przykład rozwinąć funkcję podcałkową w potęgach b_k, wtedy:

$$Z(\vec{b}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k_1,k_2\ldots k_l=1}^{n} b_{k_1} b_{k_2} \ldots b_{k_l} \langle x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_l} \rangle$$

~~Wartości oczekiwane~~

Odpowiedni moment możemy otrzymać ~~poprzez~~ z funkcji $Z(\vec{b})$, po zróżniczkowaniu ze względu na jej argumenty b_k.

Na przykład:

$$\left.\frac{\partial Z(\vec{b})}{\partial b_k}\right|_{\vec{b}=0} = \int d^n x \, x_k e^{\vec{b}\cdot\vec{x}} \Omega(\vec{x}) \Big|_{\vec{b}=0} = \int d^n x \, x_k \Omega(\vec{x}) = \langle x_k \rangle$$

ogólnie:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_l} \rangle = \left[\frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \ldots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} Z(\vec{b}) \right]\Bigg|_{\vec{b}=0}$$

__Uwaga:__ w przypadku, gdy liczba komponentów wektora $\vec{b}$ i $\vec{x}$ robi się nieskończona w granicy dostajemy funkcjonał generujący, gdzie $b(t)$, $x(t)$ są pewnymi funkcjami. (granica ciągła)

wszystkie niedoblicitujące zagadnienia w wielociałowej mechanice kwantowej są związane z ~~kwadra~~ hamiltonianami będącymi formą kwadratową operatorów kreacji i anihilacji. ~~Dlatego~~
W związku z tym szczególnie ważna jest umiejętność liczenia ~~\~~ momentów z miarą gaussowską.

Rozważmy całkę gaussowską:

$$Z(\mathbb{A}) = \int d^n x \; e^{-\mathbb{A}(\vec{x})} \quad , \qquad (*)$$

gdzie $\mathbb{A}$ jest rzeczywistą formą kwadratową:

$$\mathbb{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^{n} x_i A_{ij} x_j$$

Całka ta jest zbieżna tylko, gdy symetryczna macierz $\mathbb{A}$ o rzeczywistych elementach A_{ij} jest dodatnia (~~a~~ wszystkie jej wartości własne są ściśle ~~z~~ dodatnie), wtedy:

$$Z(\mathbb{A}) = (2\pi)^{n/2} (\det \mathbb{A})^{-1/2}$$

Dowód tej własności przeprowadzimy dla macierzy rzeczywistych, ale ponieważ powyższe wyrażenie jest funkcją analityczną wszystkich elementów macierzowych wynik można uogólnić także na przypadek zespolonych całek, poprzez odpowiednie ~~rozu~~ traktowanie pierwiastka kwadratowego w sensie liczb zespolonych.

Dowód:

Wiemy, że dla $a>0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2/2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Macierz symetryczną A w powyższym wyrażeniu (*) można zdiagonalizować przy pomocy transformacji ortogonalnej, więc:

$$\hat{A} = \mathbb{O}\, \mathbb{D}\, \mathbb{O}^T \quad \text{, gdzie}$$

$\mathbb{O}$ jest macierzą ortogonalną, a $\mathbb{D}$ jest macierzą diagonalną o elementach:

$$D_{ij} = a_i \delta_{ij} \quad , a_i > 0 \qquad \mathbb{O}^T \mathbb{O} = \mathbb{1}$$

Dokonujemy zamiany zmiennych:
$\vec{x} \longrightarrow \vec{y}$ takiej, że

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{O}_{ij} y_j \Rightarrow \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j = \sum_{ijk} x_i O_{ik} a_k O_{jk} x_j =$$

$$= \sum_i a_i y_i^2$$

Jakobian dla transformacji ortogonalnej wynosi

$$|\det \mathbb{O}| = 1$$

zatem całka (*) faktoryzuje się do postaci:

$$Z(A) = \prod_{i=1}^{n} \int dy_i\, e^{-a_i y_i^2/2} \overset{a_i>0}{\downarrow}{=} (2\pi)^{n/2} (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1/2} =$$

wyznacznik dla $\mathbb{D}$

$$= (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2}$$

wyznacznik jest niezmiennikiem macierzy.

W przypadku macierzy $\mathbb{A}$ o elementach zespolonych należałoby wykorzystać transformację unitarną:

$$\mathbb{A} = \mathcal{U}\,\mathbb{D}\,\mathcal{U}^T$$

$\mathcal{U}$ – macierz unitarna, $\mathbb{D}$ – dodatnie macierz diagonalna.

Przyjrzyjmy się teraz ~~bardziej~~ ogólniejszej sytuacji:

$$Z(\mathbb{A},\vec{b}) = \int d^n x\, e^{-\mathbb{A}(\vec{x}) + b\cdot\vec{x}},$$

gdzie $\mathbb{A}(\vec{x})$ jest formą kwadratową.

Aby obliczyć $Z(\mathbb{A},\vec{b})$ najpierw szukamy minimum funkcji $A(\vec{x}) - \vec{b}\cdot\vec{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} A_{kj}x_j - b_k = 0$$

Wprowadzając macierz odwrotną:

$$\mathbb{\Delta} = \mathbb{A}^{-1}$$

mamy, że

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij} b_j$$

dokonujemy zmiany zmiennych: $x_i \mapsto y_i$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij} b_j + y_i\,,$$

wtedy

$$Z(\mathbb{A},\vec{b}) = e^{\Delta(\vec{b})}\int d^n y\, e^{-A(\vec{y})},$$

gdzie $\Delta(\vec{b}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_i \Delta_{ij} b_j$

Zatem

$$Z(A,\vec{b}) = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2}\, e^{\Delta(\vec{b})} \qquad (**)$$

~~Twierdzenie Wicka:~~

Gdy macierz A jest dodatnie i rzeczywista, wtedy można ją traktować jako miarę nad $\mathbb{R}^n$ lub rozkład prawdopodobieństwa. Wartości oczekiwane w takim przypadku wynosi:

$$\langle F(\vec{x})\rangle = \mathcal{N}(A) \int d^n x\, F(\vec{x})\, e^{-A(\vec{x})},$$

gdzie normalizację $\mathcal{N}$ jest wybrane tak, by $\langle 1\rangle = 1$, czyli

$$\mathcal{N}(A) = Z^{-1}(A,0) = 2\pi^{-n/2} (\det A)^{1/2}$$

Zatem ~~funkcję generującą jest postaci:~~ funkcja generująca jest postaci:

$$\langle e^{\vec{b}\cdot\vec{x}}\rangle = Z(A,\vec{b}) / Z(A,0),$$

~~gdzie~~ Dowolny moment dla rozkładu gaussowskiego możemy uzyskać różniczkując ~~funkcję generującą~~ $Z(A,\vec{b})$ względem b_i:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l}\rangle = (2\pi)^{-n/2} (\det A)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} Z(A,\vec{b})\right)\Big|_{\vec{b}=0}$$

Zastępując $Z(A,\vec{b})$ przez wyrażenie $(**)$ mamy:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_l}\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \frac{\partial}{\partial b_{k_2}} \dots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} e^{\Delta(\vec{b})}\right)\Big|_{\vec{b}=0} \qquad (***)$$

Bardziej ogólnie, gdy $F(\vec{x})$ posiada rozwinięcie w szereg potęgowy, wtedy

$$\langle F(\vec{x})\rangle = \left(F\left(\frac{\partial}{\partial \vec{b}}\right) e^{\Delta(\vec{b})}\right)\Big|_{\vec{b}=0}$$

Twierdzenie Wicka

Tożsamość (**) prowadzi nas do twierdzenia Wicka: Za każdym razem, gdy pochodna działa na eksponent po prawej stronie równania generuje ona czynnik:

$$\frac{\partial}{\partial b_k} e^{\Delta(\vec{b})} = \sum_{k'} \Delta_{kk'} b_{k'} e^{\Delta(\vec{b})}$$

Kolejna pochodna musi działać na ten sam czynnik inaczej ~~od~~ wkład ten będzie znikał w granicy $\vec{b}=0$. Zatem wartość oczekiwana iloczynu $x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_\ell}$ z miarą gaussowską $e^{-A(x)}/Z(A,0)$ jest uzyskana w następujący sposób:

- najpierw rozważamy wszystkie możliwe pary indeksów $k_1, \ldots, k_\ell$ (ℓ musi być parzyste!). Każda para $k_p k_q$ jest związana z elementem $\Delta_{k_p k_q}$ macierzy $\Delta = A^{-1}$, wtedy

$$\langle x_{k_1} \ldots x_{k_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{po wszystkich} \\ \text{możliwych sparowaniach} \\ P \text{ indeksów } \{k_1 \ldots k_\ell\}}} \Delta_{k_{p_1} k_{p_2}} \ldots \Delta_{k_{p_{\ell-1}} k_{p_\ell}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\substack{\text{A.P.P.} \\ \text{all possible} \\ \text{pairings}}} \langle x_{k_{p_1}} x_{k_{p_2}} \rangle \ldots \langle x_{k_{p_{\ell-1}}} x_{k_{p_\ell}} \rangle$$

kontrakcja $\overbrace{x_{k_{p_1}} x_{k_{p_2}}}$

bo $\langle x_{k_1} x_{k_2} \rangle = \Delta_{k_1 k_2}$ ← jedna możliwa para.

Powyższe równania są charakterystyczne dla scentrowanych ($\langle x_i \rangle = 0$) miar gaussowskich. Są one znane pod nazwą twierdzenia Wicka i są one zaadaptowane także do mechaniki kwantowej oraz kwantowej teorii pola jako podstawa rachunku zaburzeń. Analogiczny dowód można przeprowadzić także w przypadku zespolonym.

MECHANIKA KWANTOWA – komentarz.

$N[ABC^\dagger DF^\dagger G^\dagger \ldots] = (-1)^P [C^\dagger F^\dagger G^\dagger \ldots ABD \ldots]$

↑ iloczyn normalny.

$T[UVW \ldots XYZ] = N[U \ldots Z] + N[\underbrace{UV}\ldots] + \ldots + N[\underbrace{UV}\,\underbrace{W \ldots X}YZ] + \ldots$

↑ iloczyn chronologiczny

$\langle 0 | T\{UV \ldots YZ\} | 0 \rangle = \overbrace{UV}\,\overbrace{W \ldots Z} + \ldots =$ suma po wszystkich w pełni skontraktowanych produktach

Przykłady:

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle = \Delta_{i_1 i_2}$$

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \rangle = \Delta_{i_1 i_2} \Delta_{i_3 i_4} + \Delta_{i_1 i_3} \Delta_{i_2 i_4} + \Delta_{i_1 i_4} \Delta_{i_2 i_3}$$

Ogólnie wartość oczekiwana dla $2p$ zmiennych jest sumą $(2p-1)(2p-3) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ różnych członów.

↑ $(2p-1)!!$

Zaburzona miara gaussowska. Wkłady połączone

Rozważamy teraz ogólniejszy rozkład prawdopodobieństwa $e^{-A(\vec{x},\lambda)} / Z(\lambda)$, gdzie funkcja $A(\vec{x},\lambda)$ jest sumą formy kwadratowej $A(\vec{x})$ oraz pewnego wielomianu $\lambda V(\vec{x})$ w zmiennych x_i:

$$A(\vec{x},\lambda) = A(\vec{x}) + \lambda V(\vec{x})$$

parametr $\lambda > 0$ charakteryzuje amplitudę odchylenia od rozkładu gaussowskiego, przy czym wielomian V jest wybrany tak by całka zbiegała.

Normalizacja $Z(\lambda)$ jest dana całką:

$$Z(\lambda) = \int d^n x \, e^{-A(\vec{x},\lambda)}$$

całka może być policzona przez rozwinięcie funkcji podcałkowej względem λ:

$$Z(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int d^n x\, V^k(\vec{x})\, e^{-A(\vec{x})} = Z(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle V^k(\vec{x}) \rangle_0 ,$$

gdzie $\langle \cdot \rangle_0$ jest ~~średnią~~ wartością oczekiwaną dla rozkładu gaussowskiego. Każdy wyraz rozwinięcie może być policzony za pomocą twierdzenia Wicka.

Wykorzystując $\langle F(\vec{x}) \rangle = \left(F(\partial/\partial\vec{b})\, e^{\Delta(\vec{b})} \right)\Big|_{\vec{b}=0}$

dla $F = e^{-\lambda V}$, wtedy

$$Z(\lambda)/Z(0) = \exp\left[-\lambda V\left(\tfrac{\partial}{\partial \vec{b}}\right) \right] e^{\Delta(\vec{b})} \Big|_{\vec{b}=0}$$

<u>Przykład.</u> (Model ϕ^4)

Rozważmy zaburzenie:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^{N} x_i^4$$

dla rzędu λ^2 mamy ($\Delta A = 1$):

$$Z(\lambda)/Z(0) = 1 - \frac{1}{4!}\lambda \sum_i \langle x_i^4 \rangle_0 + \frac{1}{2!(4!)^2} \lambda^2 \sum_{ij} \langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0 + O(\lambda^3) =$$

$$= 1 - \frac{3!!}{4!} \lambda \sum_i \Delta_{ii}^2 + \frac{(3)^2}{2!(4!)^2} \lambda^2 \sum_i \Delta_{ii}^2 \sum_j \Delta_{jj}^2 +$$

$$+ \lambda^2 \sum_{ij} \left(\frac{72}{2!(4!)^2} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Delta_{ij}^2 + \frac{24}{2!(4!)^2} \Delta_{ij}^4 \right) + O(\lambda^3) =$$

$$= 1 - \frac{1}{8} \lambda \sum_i \Delta_{ii}^2 + \frac{1}{128} \lambda^2 \sum_i \Delta_{ii}^2 \sum_j \Delta_{jj}^2 + \lambda^2 \sum_{ij} \left(\frac{1}{16} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48} \Delta_{ij}^4 \right) + O(\lambda^3)$$

w przypadku jednej zmiennej mamy:

$$Z(\lambda)/Z(0) = 1 - \frac{1}{8}\lambda + \frac{35}{384}\lambda^2 + O(\lambda^3)$$

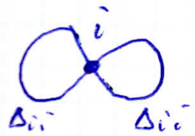
Diagramy Feynmana

Każdy wkład w szeregu perturbacyjnym można przedstawić jako graf zwany diagramem Feynmana. Wszystkie wkłady można wyprowadzić z podklasy, która zawiera tylko połączone wkłady reprezentowane przez diagramy.

 wierzchołek oddziaływanie proporcjonalny do λ

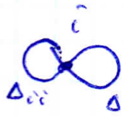
Każdy jednomian dający wkład do perturbacji $V(x)$ jest reprezentowany przez punkt (wierzchołek) z którego wychodzi liczba linii równa stopniowi jednomianu. Każde sparowanie jest przedstawione przez linie połączone do odpowiednich wierzchołków.

Wkład rzędu λ posiada pojedynczy wierzchołek:



$\sim \lambda \Delta_{ii}^2$

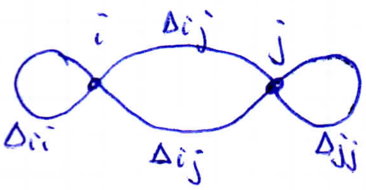
Wkłady rzędu λ^2:

(

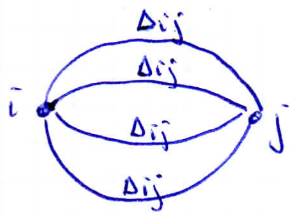
$\sim \lambda \Delta_{ii}^2$) $\otimes$ (

$\sim \lambda \Delta_{jj}^2$)

niepołączone wkłady pochodzące z $\langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0$ rzędu λ^2



$\sim \lambda^2 \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Delta_{ij}^2$



$\sim \lambda^2 \Delta_{ij}^4$

Połączone wkłady do $\langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0$ rzędu λ^2.