(1) Wykorzystując model z ostatnich ćwiczeń przedstawiający ~~opisujący~~ ~~konstrukcje~~ gaussowskie wartości oczekiwanych w przypadku zaburzenia w postaci $V(x) = \lambda \sum_{i=1}^{4} x_i^4$ omówić zasadę rozkładu gronowego (linked-cluster theorem) oraz skonstruować odpowiedni szereg kumulantowy. Na przykładzie ~~dla~~ jednego z diagramów Feynmana omówić w jaki sposób otrzymuje się czynnik kombinatoryczny. Przedyskutować pojęcie spontanicznego łamania symetrii.

**Rozwiązanie:**

Przypomnienie:

Twierdzenie Wicka:

$$\langle x_{k_1} \dots x_{k_l} \rangle = \sum_{\substack{\text{po wszystkich} \\ \text{możliwych sparowaniach} \\ P \text{ indeksów } \{k_1 \dots k_l\}}} \Delta_{k_{P_1} k_{P_2}} \dots \Delta_{k_{P_{l-1}} k_{P_l}} ,$$

gdzie $\Delta_{k_{P_1} k_{P_2}} = \langle x_{k_{P_1}} x_{k_{P_2}} \rangle$ ~~dwupunktowa funkcja~~ ~~funkcje korelacji~~

$$(\Delta)_{ij} = (A^{-1})_{ij}$$

$$A(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i A_{ij} x_j \quad , \text{ ponadto}$$

$$\langle \cdot \rangle = \int dx^n \, (\cdot) \, e^{-A(\vec{x})} \frac{1}{Z(A,0)} ,$$

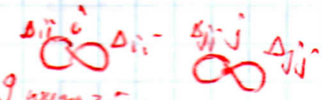
gdzie $Z(A,0) = (2\pi)^{n/2} \sqrt{\det A}$

Gdy $A(\vec{x}, \lambda) = A(\vec{x}) + \lambda V(\vec{x})$

$$Z(\lambda)/Z(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle V^k(\vec{x}) \rangle_0$$

średnie dla rozkładu gaussowskiego

W przypadku $V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4!}\sum_{i=1}^{n} x_i^4$ mamy:

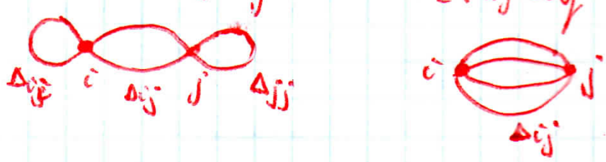



$\leftarrow$ 3 wyrazy $\quad\infty\ \Delta_{ii}$ $\qquad\qquad\qquad \swarrow$ 9 wyrazów

$$Z(\lambda)/Z(0) = 1 - \frac{1}{8}\lambda\sum_i \Delta_{ii}^2 + \frac{1}{128}\lambda^2 \sum_i \Delta_{ii}^2 \sum_j \Delta_{jj}^2 +$$

$$+ \lambda^2 \sum_{ij}\left(\frac{1}{16}\Delta_{ii}\Delta_{jj}\Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48}\Delta_{ij}^4\right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$\uparrow$ 12 wyrazy $\qquad\qquad \uparrow$ 24 wyrazy




## Zasada rozkładu gronowego (linked-cluster theorem)

Zaobserwowaliśmy, że w drugim rzędzie szeregu perturbacyjnego diagramy Feynmana mogą być podzielone na dwie klasy: diagramy połączone (spójne) oraz diagramy niepołączone (niespójne). Zbadamy teraz ten problem w sposób bardziej systematyczny.

Rozważając wyrażenie $Z(\lambda)/Z(0)$ dla $V(x) = \frac{\lambda}{4!}\sum_{i=1}^{n} x_i^4$ możemy zauważyć, że zamiast rozwijać wyrażenie to w szereg względem $\lambda$ możemy ~~najpierw~~ rozwinąć w szereg wyrażenie na $\ln Z(\lambda)$, wtedy zawierać będzie ono tylko ~~człony~~ diagramy spójne, tj. człony których nie da się ~~sfakt~~ sfaktoryzować jako iloczyn sumy:

$$\ln Z(\lambda) - \ln Z(0) = -\frac{1}{8}\lambda\sum_i \Delta_{ii}^2 + \lambda^2\sum_{ij}\left(\frac{1}{16}\Delta_{ii}\Delta_{jj}\Delta_{ij}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{48}\Delta_{ij}^4\right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

$$\frac{Z(\lambda)}{Z(0)} = \exp\left(-\frac{1}{8}\lambda\sum_i \Delta_{ii}^2\right)\exp\left(\lambda^2\sum_{ij}\left(\frac{1}{16}\Delta_{ii}\Delta_{jj}\Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48}\Delta_{ij}^4\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{8}\lambda\sum_i \Delta_{ii}^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda^2}{8^2}\sum_i \Delta_{ii}^2 \sum_j \Delta_{jj}^2\right) + \ldots\right) \cdot \left(1 + \lambda^2\sum_{ij}\left(\frac{1}{16}\Delta_{ii}\Delta_{jj}\Delta_{ij}^2 + \frac{1}{48}\Delta_{ij}^4\right)\right) + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

człony niespójne kasują się w tym rozwinięciu.
Własność ta jest ogólną cechą rozwinięcia $\ln Z(\lambda)$ dla dowolnego oddziaływania i nosi

nazwą zasady rozkładu gronowego (linked-cluster theorem). By dowieść to twierdzenie wyróżnimy przy liczeniu gaussowskich wartości oczekiwanych $\langle V^k(\vec{x})\rangle$ wkłady w twierdzeniu Wicka pochodzące od wszystkich ~~parowań~~ k parowań między czynnikami $V(\vec{x})$ od tych które się faktoryzują ~~do~~ do iloczynu wartości oczekiwanych o potęgach przy $V(\vec{x})$ mniejszych od k. Wykorzystujemy indeks (c) w celu oznaczenie wkładów połączonych, wtedy na przykład:

$$\langle e^{-\lambda V}\rangle_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!}\langle V^n\rangle_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda^n)}{n!}\langle V^n\rangle_0$$

$$\ln(1+\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\varepsilon^n}{n}$$

$$\ln Z(\lambda) = Z(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\langle V^n\rangle_c$$

$$\langle V(\vec{x})\rangle = \langle V(\vec{x})\rangle_c$$

$$\langle V^2(\vec{x})\rangle = \langle V^2(\vec{x})\rangle_c + \langle V(\vec{x})\rangle_c^2$$

$$\langle V^3(\vec{x})\rangle = \langle V^3(\vec{x})\rangle_c + 3\langle V^2(\vec{x})\rangle_c\langle V(\vec{x})\rangle_c + \langle V(\vec{x})\rangle_c^3, \ldots$$

ogólniej dla rzędu k mamy:

$$\frac{1}{k!}\langle V^k(\vec{x})\rangle = \frac{1}{k!}\langle V^k(\vec{x})\rangle_c + \text{niepołączone wkłady.}$$

Wkłady niepołączone są postaci:

$$\langle V^{k_1}(\vec{x})\rangle_c \langle V^{k_2}(\vec{x})\rangle_c \cdots \langle V^{k_p}(\vec{x})\rangle_c ,$$

gdzie $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = k$

z czynnikiem $1/k!$ pochodzącym z rozwinięcie eksponensu, mnożonego przez czynnik kombinatoryczny mówiący o ilości możliwych sparowań k obiektów w podzbiory o $k_1+k_2+\ldots+k_p$ obiektach, gdy $k_i$ są różne, wtedy

$$\frac{1}{k!}\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_p!} = \frac{1}{k_1!\,k_2!\cdots k_p!}$$

gdy $m$ potęg $k_i$ są takie same, wtedy należy podzielić przez dodatkowy czynnik $m!$, by nie liczyć dwukrotnie tych samych permutacji. Wtedy rozwinięcie perturbacyjne można zapisać w postaci:

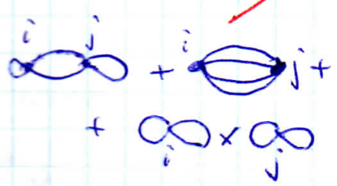
$$W(\lambda) = \ln Z(\lambda) = \ln Z(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \langle V^k(\vec{x})\rangle_c ,$$

co potwierdza, że wspomniane kasowanie się poszczególnych członów niespójnych jest ogólne, np.

Przykład:

$$\langle V\rangle = \langle V\rangle_c \leftarrow$$

$$\langle V^2\rangle = \langle V^2\rangle_c + \langle V\rangle_c^2$$



$$\Rightarrow \langle V_c^2\rangle = \langle V^2\rangle - \langle V_c\rangle^2$$

kasowanie wkładów

## Wartości oczekiwane. ~~Kumulanty~~:

Momenty dla rozkładu $e^{-A(\vec{x},\lambda)}/Z(\lambda)$, gdzie $A(\vec{x},\lambda)$ jest wielomianem:

$$A(\vec{x},\lambda) = A(\vec{x}) + \lambda V(\vec{x})$$

czyli wartości oczekiwane $\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}\rangle_\lambda$ są dane:

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l}\rangle_\lambda = Z^{-1}(\lambda)\, Z_{i_1 i_2 \dots i_l}(\lambda),$$

gdzie $Z_{i_1 i_2 \dots i_l}(\lambda) = \int d^n x \; x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_l} \exp[-A(\vec{x},\lambda)]$

i nazywane są funkcjami $l$-punktowymi.

~~Np. przykład z funkcji~~

Funkcje dwupunktowe $\langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda$ wymaga obliczenia całki:

$$Z_{i_1 i_2}(\lambda) = \int d^n_x \, x_{i_1} x_{i_2} \exp\left[-A(\vec{x},\lambda)\right]$$

W przypadku $V(\vec{x}) = \frac{\lambda}{4!} \sum_{i=1}^{n} x_i^4$ mamy:

$$\begin{aligned} Z_{i_1 i_2}(\lambda)/Z(0) = {} & \Delta_{i_1 i_2} - \frac{1}{24} \lambda \Delta_{i_1 i_2} \sum_i \langle x_i^4 \rangle_0 - \frac{1}{2} \lambda \sum_i \Delta_{i i_1} \Delta_{ii} \Delta_{i i_2} + \\ & + \frac{\lambda^2}{2!(4!)^2} \sum_{ij} \Delta_{i_1 i_2} \langle x_i^4 x_j^4 \rangle_0 + \frac{\lambda^2}{2!\,4!} \sum_{ij} \Delta_{i i_1} \Delta_{ii} \Delta_{i i_2} \langle x_j^4 \rangle_0 + \\ & + \lambda^2 \sum_{ij} \Big( \frac{1}{4} \Delta_{i i_1} \Delta_{i i_2} \Delta_{ij}^2 \Delta_{jj} + \frac{1}{6} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij}^3 + \\ & + \frac{1}{4} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij} \Delta_{ii} \Delta_{jj} \Big) + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

więc

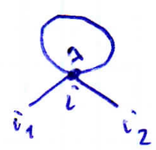
$$\begin{aligned} \langle x_{i_1} x_{i_2} \rangle_\lambda = {} & \Delta_{i_1 i_2} - \frac{1}{2} \lambda \sum_i \Delta_{i i_1} \Delta_{ii} \Delta_{i i_2} + \\ & + \lambda^2 \sum_{ij} \Big( \frac{1}{4} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij} \Delta_{ii} \Delta_{jj} + \\ & + \frac{1}{4} \Delta_{i i_1} \Delta_{i i_2} \Delta_{ij}^2 \Delta_{jj} + \frac{1}{6} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij}^3 \Big) + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

Diagramy Feynmana:

rząd 1:

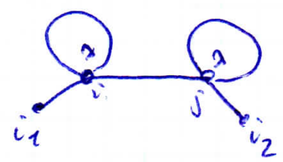
$\Delta_{i_1 i_2}$

rząd $\lambda$:

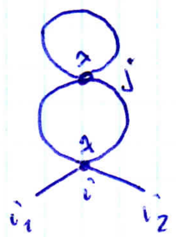


$\sim \lambda \sum_i \Delta_{i i_1} \Delta_{ii} \Delta_{i i_2}$

rząd $\lambda^2$:



$\sim \frac{\lambda^2}{\cancel{4}} \sum_{ij} \Delta_{i_1 i} \Delta_{j i_2} \Delta_{ij} \Delta_{ii} \Delta_{jj}$



$$\sim \lambda^2 \sum_{ij} \Delta_{i_1 i}\, \Delta_{i_2 i}\, \Delta_{ij}^2\, \Delta_{jj}$$

sumujemy po wewnętrznych wierzchołkach

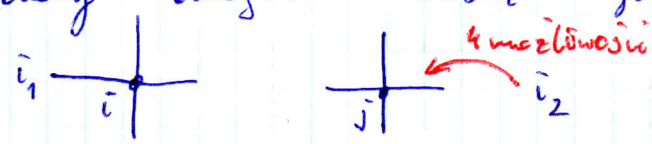
$$\sim \lambda^2 \sum_{ij} \Delta_{i_1 i}\, \Delta_{j i_2}\, \Delta_{ij}^3$$

Na przykładzie ostatniego diagramu omówimy skąd się bierze czynnik kombinatoryczny:
W drugim rzędzie rozwinięcie eksponensu powoduje, że wartość oczekiwana dana jest wzorem:

$$\cancel{\frac{\lambda^2}{2!}} \quad 4 \quad \frac{1}{2!}\frac{\lambda^2}{(4!)^2} \sum_{ij} \langle x_{i_1} x_{i_2} x_i^4 x_j^4 \rangle_0$$

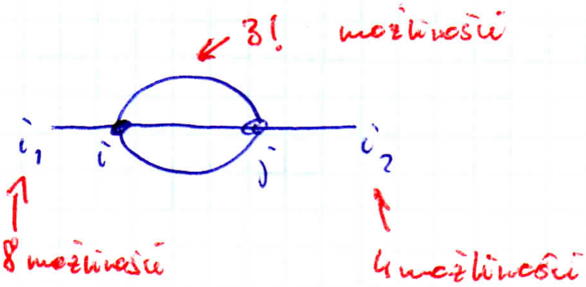
który możemy policzyć z twierdzenia Wicka:


$x_{i_1}$ mogę sparować z ~~4~~ ~~czterema~~ 8 równoważnymi liniami wychodzącymi z $x_i$ (4 linie) lub $x_j$ (4 linie). Wybierając do którego z nich mam podłączyć $x_{i_1}$ wyróżniam ten wierzchołek.
W celu połączenia ~~drugiego~~ $x_{i_2}$ aby dostać wiodący diagram muszę wybrać przeciwny wierzchołek




4 możliwości.

Następnie muszę połączyć pozostałe linie ze sobą i tutaj mam 3! możliwości pierwsze z ~~trzema~~ trzy możliwości, druga ~~z dwoma~~ dwie, a ostatnie jedna ~~z ostatnią~~.




czyli czynnik ~~pre~~ kombinatoryczny wynosi

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(4!)^2}\, 8\cdot 4\cdot 3! =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot 4\cdot 3!}{4\cdot \cancel{3!}\cdot 4!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

zgadza się!

## Rozwinięcie kumulantowe.

Rozważamy funkcję:

$$Z(\vec{b},\lambda) = \int d^n x \,\exp\left(-A(\{\vec{x}\},\lambda) + \vec{b}\cdot\vec{x}\right),$$

która jest proporcjonalne do funkcji generującej:

$$\left\langle e^{\vec{b}\cdot\vec{x}}\right\rangle_\lambda = Z(\vec{b},\lambda)/Z(\lambda),$$

więc

$$\langle x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_l}\rangle_\lambda = Z^{-1}(\lambda)\left[\frac{\partial}{\partial b_{i_1}}\frac{\partial}{\partial b_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial b_{i_l}} Z(\vec{b},\lambda)\right]\Bigg|_{\vec{b}=0}$$

Wprowadzając funkcję:

$$W(\vec{b},\lambda) = \ln Z(\vec{b},\lambda),$$

która jest funkcją generującą kumulanty rozkładu (czyli tylko połączone wkłady). Rozkład kumulantowy jest prostszy, bo zawiera tylko wkłady spójne, czyli

$$W^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \left[\frac{\partial}{\partial b_{i_1}}\frac{\partial}{\partial b_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial b_{i_l}} W(\vec{b},\lambda)\right]\Bigg|_{\vec{b}=0},$$

gdzie $W^{(l)}_{i_1 i_2 \ldots i_l}$ jest $l$-tym kumulantem lub korzystając z nomenklatury fizyki statystycznej $l$-punktową ~~potęg~~

spójną funkcją ~~korelacji~~ korelacji.

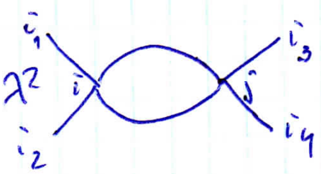
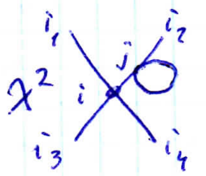
**Na przykład:**

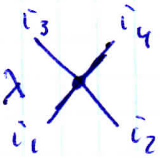
$$W^{(2)}_{i_1 i_2} = \langle x_{i_1} x_{i_2}\rangle_\lambda - \langle x_{i_1}\rangle_\lambda \langle x_{i_2}\rangle_\lambda = \langle (x_{i_1} - \langle x_{i_1}\rangle_\lambda)(x_{i_2} - \langle x_{i_2}\rangle_\lambda)\rangle_\lambda$$

W przypadku, gdy $V(\vec{x}) = V(-\vec{x})$, wtedy

$$W^{(2)}_{i_1 i_2} = \langle x_{i_1} x_{i_2}\rangle_\lambda$$

$$W^{(4)}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = \langle x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}\rangle_\lambda - \langle x_{i_1} x_{i_2}\rangle_\lambda \langle x_{i_3} x_{i_4}\rangle_\lambda + - \langle x_{i_1} x_{i_4}\rangle_\lambda \langle x_{i_2} x_{i_3}\rangle_\lambda - \langle x_{i_1} x_{i_3}\rangle_\lambda \langle x_{i_2} x_{i_4}\rangle_\lambda$$

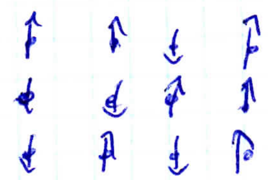
$W^{(4)}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \sim \lambda^2$  $+ \lambda^2$  $+$

$+ \lambda$ 

## Spontaniczne złamanie symetrii

Jest zjawiskiem fizycznym, ~~polegającym~~ zachodzącym, gdy stan podstawowy układu ma niższą symetrię niż symetrię układu (hamiltonianu).

**Przykład:** model $\phi^4$ (magnetyzm)



**Model Isinga w 2D**

$$\hat{H} = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}\, \underbrace{\sigma_i}_{\text{spin}} \sigma_j \quad \text{- hamiltonian}$$

Hamiltonian ten ma symetrię $O(1) \equiv \mathbb{Z}_2$, czyli symetrię odbiciową $\sigma_i \longmapsto -\sigma_i$.

$$\hat{H} = -\sum_{\langle ij\rangle} J \sigma_i \sigma_j \xmapsto{O(1)} -\sum_{\langle ij\rangle} J(-\sigma_i)(-\sigma_j) = -\sum_{ij} J \sigma_i \sigma_j = \hat{H}$$

model Isinga w średnim polu można zmapować na model $\phi^4$:

energia swobodna (funkcjonał energii swobodnej)

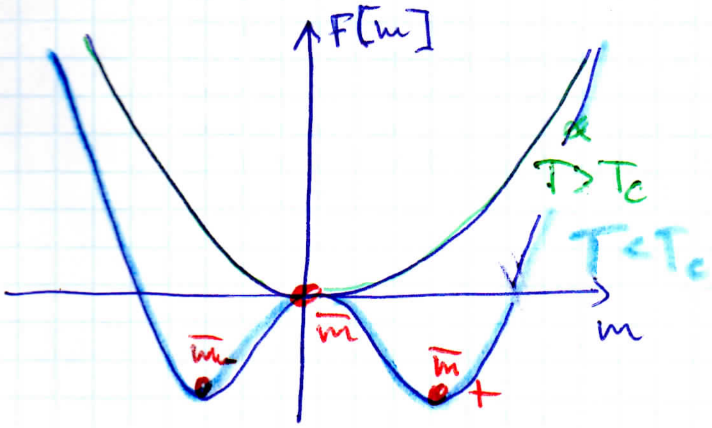
energia swobodna ma minimum

$$F = F_0 + \alpha m^2 + \beta m^4$$

magnetyzacja

gdy $\alpha = \alpha(T)$ takie, że $\alpha(T) = \begin{cases} <0 & \text{dla } T<T_c \\ >0 & \text{dla } T>T_c \end{cases}$

wtedy




m jest tak zwanym parametrem porządku. (teoria Landaua) fizyczna wartość $\bar{m}$ odpowiada minimum energii swobodnej.

W przypadku $T<T_c$ układ ma dwa równoważne stany podstawowe

↑ ↑ ↑ ↑
↑ ↑ ↑ ↑
↑ ↑ ↑ ↑

$\bar{m}_+$

oraz

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$\bar{m}_-$

mimo to wybiera jeden z nich, czyli stan podstawowy ma symetrię niższą, niż hamiltonian układu.